# SUR LA CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE SECONDE ESPÈCE DANS LE PROBLÈME PLAN RESTREINT DES TROIS CORPS

**J.-P. Marco et L. Niederman**

Dans le premier tome des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Henri Poincaré met en évidence l'importance des solutions périodiques dans la description du problème des trois corps. Il en donne d'abord des constructions perturbatives, à partir des solutions périodiques non dégénérées du problème obtenu lorsque deux des masses s'annulent. Il choisit ainsi de perturber un problème dit "planétaire", les deux masses nulles décrivant des orbites Kepleriennes elliptiques sans croisement autour de la masse principale. Depuis Poincaré, les solutions périodiques ainsi construites sont dites *de première espèce.*

Dans le troisième tome ([P]), Poincaré s'aperçoit que d'autres solutions périodiques du problème général s'obtiennent en perturbant des solutions *avec singularités* du problème à deux masses nulles - les singularités correspondant aux collisions de ces deux particules - et envisage donc la perturbation de configurations non planétaires, avec croisement des trajectoires Kepleriennes. Il baptise *solutions de seconde espèce* ces nouvelles solutions périodiques.

La démonstration donnée par Poincaré de l'existence des solutions de seconde espèce est très courte, et paraît assez difficile à justifier complètement. En particulier, la géométrie du problème n'est pas éclaircie.

Nous envisageons dans cet article un problème plus simple, directement lié au problème initial de Poincaré, et étudié aussi par Hill, celui de la construction des solutions de seconde espèce dans le problème restreint. On entend ici par problème restreint l'étude du mouvement d'une particule $P_3$ de masse nulle située dans le plan de deux points $P_2$ et $P_1$, de masses respectives $\mu \in ]0,1[$ et $1-\mu$, en mouvement circulaire autour de leur centre de masse $C$. Cette étude est effectuée dans le repère tournant lié à $P_1$ et $P_2$ et donne lieu à un Hamiltonien à deux degrés de liberté. Les solutions de seconde espèce seront ici des familles, paramétrées par $\mu$, de solutions périodiques du problème restreint, existant pour $\mu$ petit, et convergeant lorsque $\mu$ tend vers 0 vers la réunion de deux solutions *distinctes* du problème limite - le problème de Kepler de $P_3$ autour de $P_1$, en repère tournant -.

Le problème que nous venons de décrire à donné lieu à de nombreuse études analytiques (cf. [Pe1],[Pe2],[Pe3], [G1],[G2],[GO]). Nous suivons ici une approche géométrique introduite par J. Henrard ([H]), qui régularise les singularités de collision $P_3$ $P_2$ par une méthode de Levi-Civita. C'est en effet par ce procédé que le caractère "perturbations singulières" de ce problème est le plus transparent. Lorsque $\mu \neq 0$, la régularisation consiste à compactifier localement la variété d'énergie constante par adjonction d'un cercle, les solutions singulières du problème initial étant envoyées sur les solutions intersectant ce cercle. Pour $\mu = 0$, le cercle dégénère en un point d'équilibre *hyperbolique*, de signature 2-2.

Nous montrons que ce point fixe de Levi-Civita possède une infinité de solutions homoclines, et faisons apparaître les solutions de seconde espèce comme bifurcations de ces solutions homoclines. Plus précisément, le point de départ est la donnée de deux segments $\varphi_s$ et $\varphi_u$ de solutions homoclines distinctes (pour le problème de Kepler en repère tournant), et la démonstration consiste à recoller deux solutions voisines de $\varphi_s$ et $\varphi_u$ (dans le problème restreint) de telle manière que ce recollement soit une solution périodique.

Nous donnons de plus les expressions analytiques explicites des conditions d'existence des solutions de seconde espèce en termes de conditions initiales pour les orbites homoclines limites, (alors que les études précédentes de ce problème étaient seulement numériques [HH]).

**Références.**

[G1] P. Guillaume. Families of symmetric periodic orbits of the restricted three-body problem, when the perturbing mass is small. Astronomy and Astrophysics 3, 1973, p. 57-76.

[G2] P. Guillaume. Linear analysis of one type of second species solutions. Cel. Mech. 11, 1975, p. 449-467.

[GO] G. Gomez et M. Ollé. Second species solutions in the circular and elliptic restricted three body problem I et II. Celestial Mechanics 52, 1991, p. 107-166.

[H] J. Henrard. On Poincaré second species solutions. Cel. Mech. 21, 1980, p. 83-97.

[HH] M. Hénon et D.L. Hitzl. Critical generating orbits for second species solutions of the restricted problem. Cel. Mech ; 15, 1977, p. 421-452.

[Pe1] L.M. Perko. Second species periodic solutions with an $O(\mu)$ near-Moon passage. Cel. Mech. 14, 1976, p. 395-427.

[Pe2] L.M. Perko. Second species solutions with an $O(\mu^\nu)$, $1/3 < \nu < 1$, near-Moon passage. Cel. Mech. 16, 1977, p. 275-290.

[Pe3] L.M. Perko. Second species solutions with an $O(\mu^\nu)$, $0 < \nu < 1$, near-Moon passage. Cel. Mech. 24, 1981, p. 155-171.

[P] H. Poincaré. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. 1987. Blanchard. Tome 3, Sections 385-391.