APPROCHE NUMÉRIQUE DU SYSTÈME DE TRYPHON

J.-L. Sagnier

1. Le système étudié

C'est le système autonome à deux degrés de liberté, aux variables x_1, x_2, x_3 et x_4, et dont le hamiltonien s'écrit :

$$-\frac{1}{2}\omega x_2^2 + A(x_3, x_4) + C(x_3, x_4) \cdot \cos x_1 + S(x_3, x_4) \cdot \sin x_1$$

où ω est une constante et A, C et S sont des polynômes du second degré :

$$A(x_3, x_4) = c_1 x_3 + c_2(x_3^2 + x_4^2),\ \ C(x_3, x_4) = c_3(x_3^2 - x_4^2 - c_4^2),\ \ S(x_3, x_4) = 2c_3 x_3 x_4,$$

c_1, c_2, c_3 et c_4 étant des constantes. Avec des valeurs convenables des paramètres, ce système constitue un modèle simplifié du problème astéroïdal dans une résonance d'ordre deux (ici, la résonance $3:1$) : problème restreint plan, termes de courte période éliminés, fonction perturbatrice développée en négligeant les termes de degré au moins égal à quatre par rapport aux excentricités.

En désignant par n_0 le triple du moyen mouvement de Jupiter et par a_0 le demi-grand axe associé (tous deux constants), les variables s'interprètent de la manière suivante :

$$x_1 = \lambda_{\mathrm{Jup}} - 3\lambda \quad \text{(angle critique)}, \qquad x_2 = n_0 a_0^2(1 - \sqrt{a/a_0}),$$

$$x_3 = a_0\sqrt{n_0}\,(e \cdot \cos \varpi - e_0), \qquad x_4 = a_0\sqrt{n_0}\,e \cdot \sin \varpi,$$

où e_0 ($\approx 0,09$) est une constante.

On sait que le système séculaire associé, de hamiltonien indépendant de x_1 :

$$-\frac{1}{2}\omega x_2^2 + A(x_3,\, x_4)$$

admet des solutions pour lesquelles x_2 est constant, x_1 est une fonction affine du temps, tandis que les projections des trajectoires sur le plan $(x_3,\, x_4)$ sont des cercles concentriques parcourus dans le sens direct, avec une période commune égale :

$$P_{\text{séc}} = 303 \text{ siècles.}$$

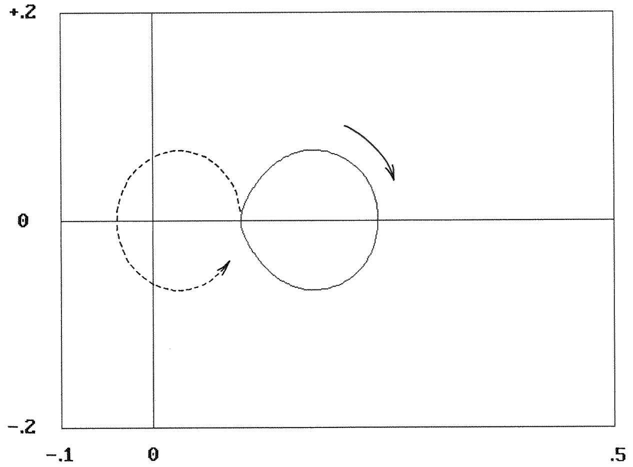

Fig. 1.
$x_{10} = 0, \; P = -80$ siècles

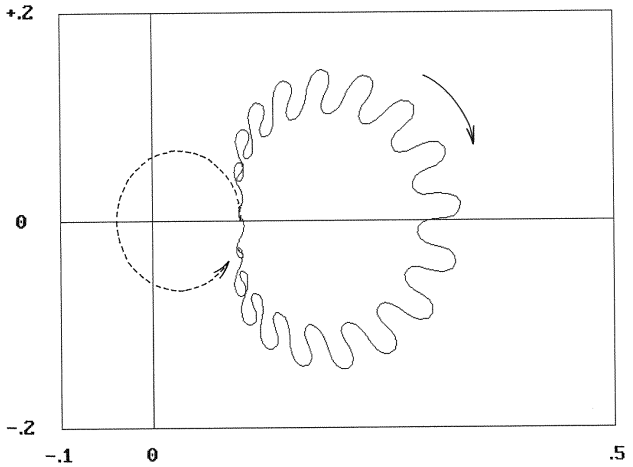

Fig. 2.
$x_{10} = 0,68\pi, \; P = -234$ siècles

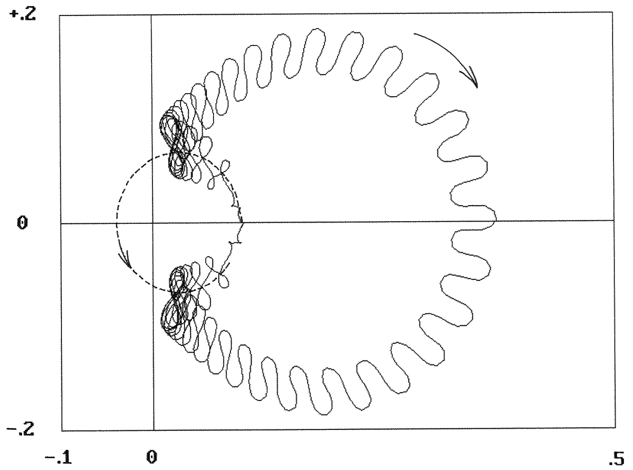

Fig. 3.
$x_{10} = 0,83\pi, \; P = -656$ siècles