### 3. Une solution périodique

On peut donc supposer l'existence de solutions périodiques (instables) séparant plusieurs types de trajectoires (dont les deux mis en évidence). Les "périodes" infinies s'interprètent alors comme celles de solutions asymptotiques qui tendent vers ces solutions périodiques.

L'aspect de solutions pour lesquelles $x_{10}$ est voisin de $\xi_1$ (par exemple celle de la figure 3), laisse supposer que les éventuelles solutions périodiques se trouvent au voisinage de :

$$e = 0,067, \qquad \varpi = \pm 0,41\pi.$$

Le calcul de solutions de conditions initiales voisines de ces points montre en effet des trajectoires restant très longtemps à proximité d'une courbe fermée (en forme de 8 sur la projection considérée). Les cas de mouvement direct et rétrograde sont respectivement illustrés par les figures 8 et 9.

Des orbites périodiques (de période voisine de 18 siècles) ont effectivement été mises en évidence numériquement.

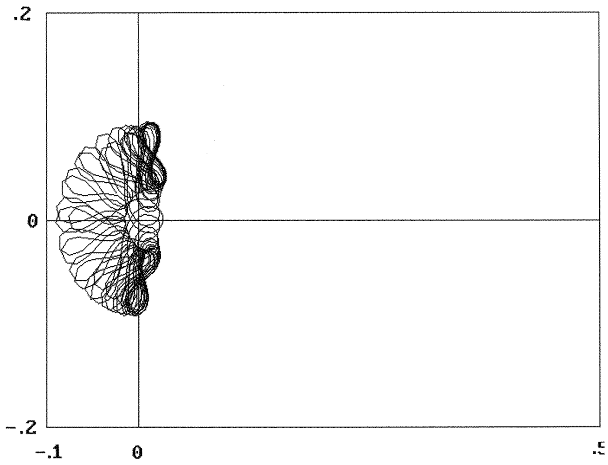


Fig. 8.

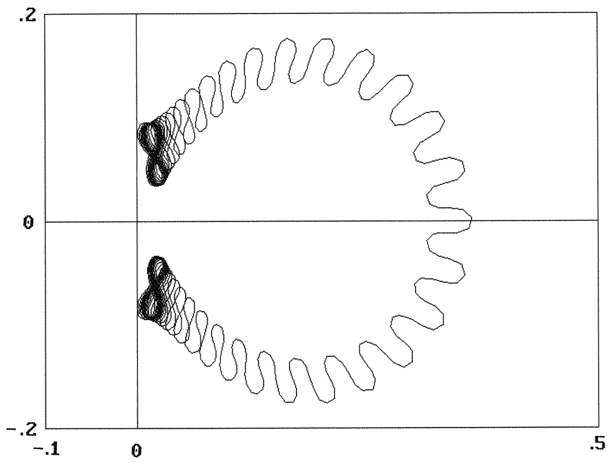


Fig. 9.

### 4. Lien avec le hamiltonien séculaire

On peut se poser la question du lien existant entre le système étudié et le système séculaire associé, dont les dynamiques semblent très différentes. Considérons le hamiltonien :

$$-\frac{1}{2}\omega x_2^2 + A(x_3, x_4) + \rho[C(x_3, x_4) \cdot \cos x_1 + S(x_3, x_4) \cdot \sin x_1]$$

qui coïncide avec celui du système étudié pour $\rho = 1$ et à celui du système séculaire pour $\rho = 0$. On détermine alors pour diverses valeurs de $\rho$ celles de $x_{10}$ qui correspondent à des limites infinies de $P$ (figure 10).

Les trajectoires rétrogrades ne disparaissent pas pour $\rho = 0$, mais pour une valeur finie $(0,21)$ de ce paramètre. On ne pourrait donc pas mettre en évidence le comportement qui nous intéresse ici au moyen d'une perturbation infinitésimale du système séculaire.

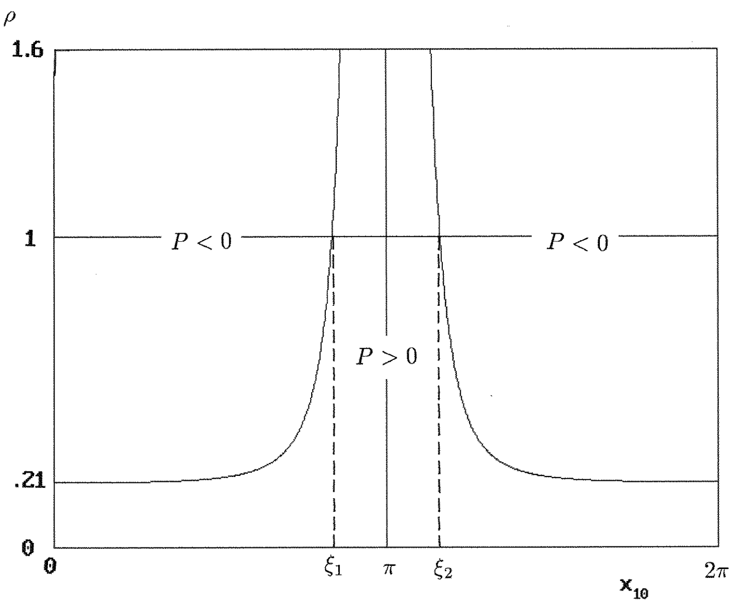


**Fig. 10.**

## 5. Projets

On étudie actuellement les deux points suivants.

(a) Exploration du voisinage des orbites périodiques, pour exhiber les divers types de solutions qui en sont issues.

(b) Étude de la famille d'orbites périodiques obtenue en faisant varier la valeur de l'énergie.

Il sera également intéressant de confronter les résultats obtenus ou à venir avec des travaux déjà effectués à propos de ce système.