ÉPHÉMÉRIDES DE COMÈTES ET D'ASTÉROÏDES SUR PC

P. Rocher

1. Introduction

Dans un environnement informatique traditionnel (programmation en mode par lots), les programmes d'intégrations numériques d'orbites de comètes et d'astéroïdes et les programmes de production d'éphémérides demandent de nombreuses manipulations au niveau de la gestion des données (conditions initiales pour les intégrations, paramètres d'édition pour les éphémérides....). Ces manipulations sont souvent la source d'erreurs et nécessitent la conservation de nombreux documents (sorties listing, états des mises à jour...) et cela pour un grand nombre de corps.

L'idée est de regrouper sous la forme de programmes conversationnels ces différentes tâches. L'utilisation de bases de données, directement accessibles, permet une gestion rapide et fiable des données (dans la mesure où les dates de mise à jour sont incorporées aux données elles-mêmes). Les saisies utilisant des masques permettent de réduire les risques d'erreur. L'utilisation de menus rend ces programmes utilisables par des personnes autres que l'auteur. La gestion par menus déroulants des différents fichiers permet une gestion simple des différentes sorties. La concentration dans un même programme de la gestion des bases de données, des intégrations et de la production d'éphémérides évite la recopie de nombreux paramètres.

2. Description

2.1. Bases de données

Les bases de données sont gérées par la méthode des arbres B (Turbo Pascal Database Toolbox), elles se composent de fichiers de données en accès direct et de fichiers d'index. La recherche d'éléments à partir des fichiers indexés est particulièrement rapide.

Pour les astéroïdes les fichiers sont indexés sur le nom, le numéro et le nom provisoire. Pour les comètes les fichiers sont indexés sur le nom de la comète, le numéro provisoire et le numéro définitif.

2.2. Intégrateur

Les intégrations numériques des orbites des corps sont effectuées par la méthode de *Gragg-Bulirsch-Stoer*, c'est une méthode de type multi-prédicteur correcteur, le prédicteur est la méthode du point milieu modifiée et le correcteur est la méthode d'extrapolation par des fractions rationnelles de Richardson avec algorithme de Neville. On tient compte pour le calcul des orbites de l'ensemble des perturbations des corps du système solaire (planètes, Lune et Soleil).

3. Sources

3.1. Astéroïdes

Les éléments des astéroïdes sont issus des éléments ITA93 fournis par l'Institut d'Astronomie Théorique de St Pétersbourg, comprenant 5560 astéroïdes (mai 1993), la base est mise à jour et complétée tous les mois à l'aide des éléments publiés dans les Minor Planet Circulars. Au 23 novembre 1994, la base compte 6148 astéroïdes.

3.2 Comètes

Les éléments sont ceux de la base produite par J.B. Marsden en 1982, ils ont été transformés dans le repère J2000 et sont mis à jour depuis 1983 à l'aide des éléments calculés au Bureau des longitudes (Notes Scientifiques et Techniques et projet ISO), on utilise également les éléments publiés dans les Minor Planet Circulars (M.P.C), les Nakano Wa Kangaeru Noda (N.K) et les Circulaires UAI.

3.3. Planètes, Soleil et Lune

Les éphémérides des corps du système solaire utilisées pour les intégrations numériques et le calcul des éphémérides sont les éphémérides du Bureau des longitudes : VSOP82 de P. Bretagnon (1982), TOP82 de J.L. Simon (1983) pour le Soleil et les planètes et ELP-2000/82 de M.Chapront-Touzé et J. Chapront (1983) pour la Lune.

3.4. Logiciels

Les deux programmes (version 1.7 pour ASTERPRO et version 3.0 pour COMETPRO) sont écrits en Borland Pascal 7.0 et tournent en mode protégé. Ils utilisent un logiciel de gestion d'écrans et de menus déroulants Hyper Screen de PC Soft. Ils tournent sur PC muni d'un coprocesseur mathématique et de 4Mo de RAM minimum.

4. Bases de données

4.1. Base astéroïdes

La base contient un seul fichier de données contenant les 6148 astéroïdes numérotés à ce jour (15 novembre 1994) et trois fichiers d'index.

4.2 Base comètes

Huit fichiers de données répartis sur les périodes suivantes

1 : comètes de la période -239 - 1825

2 : comètes de la période 1826 - 1885

3 : comètes de la période 1886 - 1930

4 : comètes de la période 1931 - 1955

5 : comètes de la période 1956 - 1975

6 : comètes de la période 1976 - 1984

7 : comètes de la période 1985 - 1991

8 : comètes de la période 1992 ....

Et trois fichiers d'index pour chaque fichier de données.

4.3. Base lieux

Un fichier de données contenant les positions géographiques et l'altitude de différents lieux (fichier des observatoires publié dans les M.P.C.) accessibles à partir de deux fichiers indexés, le premier par les noms des lieux et le second par des codes entiers (codes observatoires utilisés dans la publications des observations dans les M.P.C.).

4.4. Gestion des bases

Sur chaque élément des différentes bases de données on peut effectuer les opérations suivantes : la consultation, la modification, la destruction et l'édition. Chacune de ces opérations passe par la recherche des éléments. Il y a trois manières de faire cette recherche.

• Recherche nominale

Pour les comètes, la recherche peut se faire sur le nom de la comète (plusieurs comètes peuvent avoir le même nom), ou sur le nom provisoire de la comète (par exemple 1994l), ou bien sur le nom définitif de la comète lorsqu'il existe, dans les deux derniers cas la recherche donne un objet unique.

Pour les astéroïdes la recherche peut se faire sur le nom de l'astéroïde (lorsqu'il existe), sur son nom provisoire ou sur son numéro. Dans tous les cas la recherche donne un objet unique.

• Recherche séquentielle

Dans ce cas les éléments sont visualisés à l'écran séquentiellement à partir des fichiers de la base.

• Recherche à l'aide de menus déroulants

La liste des noms des objets apparaît par ordre alphabétique dans un menu déroulant, et il suffit de cliquer sur objet désiré. Pour les comètes et les astéroïdes on affiche les noms des corps, pour les lieux on affiche les noms des lieux.

4.5. Création de fichiers d'éléments à partir des bases de données

Ces programmes permettent également d'extraire des éléments des bases de données et de les stocker dans des fichiers sous différents formats. Le choix des éléments porte sur de nombreux critères (nom, magnitude, éléments orbitaux, distance au périhélie, date de mise à jour, etc.).

Les formats suivants sont disponibles :

• Format ITA : format identique au format de la base origine ITA 1993.

• Format MPC : format texte ASCII identique au format de publications dans les Minor Planet Circulars.

• Format INT : format spécial, utilisé pour l'intégration d'un groupe d'objets.

• Format Excel : format permettant de réutiliser le fichier avec le tableur Excel.

• Format C2A : format spécial pour réutiliser le fichier éléments avec le logiciel C2A.

5. Intégration

5.1. Un corps

Les programmes permettent d'intégrer l'orbite d'un des corps sur une période pouvant aller de 1850 à 2050. On tient compte de l'ensemble des perturbations planétaires, solaire et lunaire ainsi que des effets des forces de type non gravitationnelle pour les comètes. Les intégrations se font dans le repère équatorial J2000. On a le choix entre deux types d'intégrations, soit intégrer de la date correspondant à l'époque des éléments (TINIT) jusqu'à une date finale (TFIN), soit intégrer jusqu'à une date intermédiaire (TVAL) puis de cette date intermédiaire jusqu'à une date finale (TFIN). On peut, si on le désire, sauvegarder les résultats de l'intégration numérique sur un fichier.

5.2. Un groupe de corps

On peut, de la même manière, intégrer un groupe de corps dont les éléments auront été préalablement mis dans un fichier élément au format INT.

6. Éphémérides

Ces programmes permettent le calcul et l'édition sous différents formats des éphémérides des objets des différentes bases de données. Pour produire ces éphémérides, nous avons accès à différents choix qui sont les suivants.

6.1. Sources

Les éphémérides peuvent être calculées soit à partir des éléments orbitaux à l'aide des formules du problème des deux corps, soit à partir des résultats d'une intégration numérique préalablement effectuée et sauvegardée sur fichier. Dans ce dernier cas, le programme vérifie si l'intégration numérique a bien été faite avec les mêmes éléments que ceux contenus dans la base de données.

6.2. Repères

Dans la version actuelle, on fournit des coordonnées géocentriques ou topocentriques, apparentes ou astrométriques. Les coordonnées apparentes sont données dans le repère défini par l'équateur et l'équinoxe vrais de la date. Les coordonnées astrométriques sont données dans le repère défini par l'équateur et l'équinoxe moyen B1950. ou J2000. Dans le cas de coordonnées topocentriques, on peut également obtenir les coordonnées horizontales (hauteur, distance zénithale et azimut). Ces calculs sont faits en utilisant les constantes et les formulaires recommandés par l'UAI.

6.3. Échelle de temps

On a le choix entre le Temps universel (UT) et le Temps terrestre (TT). Pour les dates postérieures à 1993, la différence Temps terrestre moins Temps universel (TT-UT) est extrapolée.

6.4. Éditions

Pour une date donnée, ou sur un intervalle de temps donné avec le pas de calcul de notre choix on édite à l'écran et sur fichier (si on le désire) les renseignements suivants.

- Pour une comète,
  - α : l'ascension droite de la comète en heure, minute et seconde de temps,
  - δ : la déclinaison de la comète en degré, minute et seconde de degré,
  - Δ : la distance de la comète à la Terre en UA,
  - r : la distance de la comète au Soleil en UA,
  - Elong. : l'élongation de la comète en degré,
  - Phase : l'angle de phase de la comète en degré,
  - A.P. : l'angle au pôle de la direction de la queue en degré,
  - Queue : la longueur apparente de la queue vue de la Terre en degré,
  - E.L. : la distance angulaire comète - centre de la Lune en degré,
  - P.L. : l'angle de phase de la Lune en degré,
  - m1 : la magnitude totale de la comète,
  - m2 : la magnitude du noyau de la comète.
- Pour un astéroïde :
  - α : l'ascension droite de l'astéroïde en heure, minute et seconde de temps,
  - δ : la déclinaison de l'astéroïde en degré, minute et seconde de degré,
  - Δ : la distance de l'astéroïde à la Terre en UA,
  - r : la distance de l'astéroïde au Soleil en UA,
  - Elong. : l'élongation de l'astéroïde en degré,
  - Phase : l'angle de phase de l'astéroïde en degré,
  - E.L. : la distance angulaire astéroïde - centre de la Lune en degré,
  - P.L. : l'angle de phase de la Lune en degré,
  - m : la magnitude de l'astéroïde.

On a la possibilité de sortir ces éphémérides sur un fichier ASCII ou sur un fichier au format C2A.

6.5. Champs

On peut également calculer pour une date ou une période donnée, toutes les éphémérides des corps dont les positions sont contenues dans un champ stellaire donné, et dont les éléments correspondent à différents critères de choix. Cette possibilité n'existe qu'avec l'utilisation du formulaire du programme des deux corps.

6.6. Calcul de nouveaux éléments

On peut également calculer, à partir d'une intégration numérique, les éléments osculateurs écliptiques pour une date donnée.

7. Gestion des imprimantes

Ce programme travaille avec un gestionnaire d'imprimante, il s'agit d'un fichier de configuration qui permet d'utiliser plusieurs types d'imprimantes.

8. Programmes liés

Ce sont différents programmes qui utilisent les résultats ou fichiers générés par les deux programmes COMETPRO et ASTERPRO. Et également les programmes qui génèrent des éléments pour les bases de données.

8.1. Programme C2A

Programme de calcul et de tracé de champs d'étoiles, avec possibilité d'inclure des éphémérides externes, soit sous la forme d'éléments osculateurs, soit sous la forme de positions tabulées (Version 2.0, 1993 BdL - Ph. Deverchere).

8.2. Occultation d'une étoile par une comète ou un astéroïde

Programme de calcul des circonstances et de tracé des courbes d'occultation d'une étoile par une comète ou un astéroïde (Journées Scientifiques du BdL 1990).

8.3. Amélioration des orbites cométaires

Programme permettant la gestion des observations des comètes et l'ajustement des orbites cométaires sur les observations par la méthode des moindres carrés. Ce programme calcule, entre autre, les éléments pour la base comètes (Version PC 1994).

9. Améliorations et projets

Ajouter les planètes et la Lune dans les éphémérides (prévu dans le programme mais pas encore disponible).

Donner un plus grand choix dans les types de coordonnées et dans la présentation des résultats (prévu dans le programme, mais pas encore disponible).

Rédiger une documentation pour chaque programme.

Améliorer les programmes d'installation.

Permettre des sorties au format TEX.

Ajouter le calcul des levers couchers.

Interfacer le programme COMETPRO avec le programme d'amélioration d'orbite cométaire.

Passer sur une station Unix, lorsque l'on disposera du logiciel identique à Hyper Screen sous UNIX.

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier : V. Raoult , Th. Derouazi, A. Le Fiblec, L. Bergeal, F. Cavelier et Y. De Kergrohen qui ont participé à la saisie et au pointage des éléments orbitaux et des observations de comètes.

Sans oublier les premiers utilisateurs de ces deux programmes, F. Colas, J. Lecacheux et L. Jorda qui m'ont signalé de nombreux "bugs" et des améliorations possibles, ainsi que P. Bretagnon, J.L Simon, M. Chapront, J. Chapront pour les éphémérides BDL82 et G. Francou pour les nombreux programmes d'éphémérides qu'il m'a fournis.

ANALYTICAL TECHNIQUES FOR COMPACT THEORIES OF MOTION

V.A. Brumberg

1. Introduction

Construction of analytical theories of motion is considered now by many people as an out-of-date domain of celestial mechanics. It is true that most 'practical' specialists in celestial mechanics use numerical integration as a main tool to solve differential equations of motion of celestial bodies whereas most theoreticians are involved in studying new types of motion in celestial mechanics problems such as chaotic motions, resonance passages, etc. The aim of this presentation is to show some new stimulatory points in the old area of analytical techniques of celestial mechanics. Indeed, twenty years ago the main recipe in this field was to develop specialized celestial mechanics software (Poisson series processors, for the first line) based on some general language (mostly FORTRAN) and to construct analytical theories in form of very long Poisson series. The main recipe at present is to use universal CAS (MAPLE, MATHEMATICA, etc.) to create more sophisticated celestial mechanics software (closed form Keplerian processor, for example) and to construct analytical theories in more compact form. It became evident that the rude increase of the number of terms in Poisson series would not improve effectively the accuracy of analytical theories and one should try to develop compact form analytical theories.

We give below several illustrative examples.

2. Damour–Deruelle parameterization of the relativistic two-body problem

The classical solution of the Keplerian two-body problem involves one and the same constant, eccentricity e, in the equation of orbit (relating the radius-vector r to the eccentric anomaly g), Kepler equation (relating time t to g), and the anomaly equation (relating the true anomaly v to g and the argument of latitude φ). For the relativistic two-body problem in the post-Newtonian approximation (first-order solution) Damour and Deruelle (1985) has shown that the solution may be represented by the same simple formulas provided that each of three above-mentioned equations contains its own eccentricity constant. Moreover, this solution may be extended to the post-post-Newtonian approximation by including four periodic terms (Damour and Schäfer, 1988; Schäfer and Wex, 1993). This second-order solution is given by the equations

$$\frac{2\pi}{P}(t-\tau) = g - e_t \sin g + A_P \sin v + B_P(v-g)\,, \tag{2.1}$$

$$r = a(1 - e_r \cos g)\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{2\pi}{\Phi}(\varphi - \omega) = v + A_\Phi \sin 2v + B_\Phi \sin 3v\,, \tag{2.3}$$

and

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e_v}{1-e_v}}\tan\frac{g}{2}\,. \tag{2.4}$$

Of course, this solution contains two arbitrary angular constants τ and ω and two arbitrary metric constants a and one of the three eccentricities. Two other eccentricities and constants P, Φ, A_P, A_Φ, B_P and B_Φ are expressed in terms of these two metric constants. All four constants A and B vanish for the first-order solution. Being equivalent to traditional forms of the solution of the same problem (Klioner and Kopeikin, 1994) this solution is presented in the compact form and may serve a good example in investigating other types of the perturbed two-body problem.

3. Closed form Keplerian processor

The main operation of the closed form Keplerian processor is to integrate with respect to time t the functions of the elliptic motion of the form

$$F = A(r, \dot{r}) \exp \mathrm{i}(jv + kg) \tag{3.1}$$

where A is a polynomial function of its arguments. Jefferys (1971) was the first to develop an algorithm to perform this operation. After integration one may meet a secular term in mean anomaly M which is usually separated from periodic terms. The process of integration cannot be advanced further if one meets functions $\chi(r) = \ln(r/a)$ and the equation of centre $f = v - M$ (actually occurred already in (2.1)). Quite recently Osácar and Palacián (1994) managed to show with the aid of MATHEMATICA that integrals of these functions might be expressed in terms of Euler dilogarithm of purely imaginary argument. The practical efficiency of this representation remains to be investigated but the principal possibility to advance in the closed form solution is of much importance.

Another possibility suggested by N.N.Vasiliev (Brumberg et al., 1989) is to replace functions $\chi(r)$ and $\Psi(r) = f/\sin v$, changing for the elliptic motion in some definite limits, by their best approximation polynomials. The efficiency of this approach remains also unknown.

4. Simplifications in satellite theory

Most extended applications of the closed form algorithms have been made in the problem of Earth's satellite motion. The review paper by Deprit and Ferrer (1989) describes the set of canonical transformations (elimination of parallax, elimination of latitude, etc.) to new variables resulting in straightforward integration of the equations of motion for the case of zonal perturbations. The same aim may be achieved by integration by parts technique with the aid of the closed form Keplerian processor. This technique is suitable also for luni-solar perturbations because after each integration by parts the remaining integral has the same form as the original one but with small factor n'/n, n and n' being the mean motions of a satellite and a third body (Moon or Sun), respectively (Egorova, 1960). The case of tesseral harmonics presents more difficulties and will be considered below.

5. Elliptic function expansions as convergence accelerators

Application of elliptic functions in celestial mechanics has a long history. Contemporary stage of their application initiated by Richardson (1982) and Williams et al. (1987) and developed in three papers of 1992 by V.Brumberg (application to the general planetary theory), E.Brumberg (application to the perturbed two-body problem) and Klioner (MATHEMATICA algorithms supporting these applications) is characterized by using not elliptic functions themselves but rather their Fourier expansions as constructive tool for analytical theories. The key point is to replace the ordinary Fourier expansion

$$f(x,y) = \sum f_m(x) \exp imy \tag{5.1}$$

of a function of one power ($0 \le x \le 1$) and one trigonometric ($0 \le y \le 2\pi$) variables by the Fourier expansion of its corresponding Jacobi elliptic function (if, of course, such a correspondence exists)

$$g(k,u) = \sum g_m(q) \exp imw\,, \qquad w = \frac{\pi u}{2K}\,, \tag{5.2}$$

k and q being the modulus and Jacobi nome of the elliptic function, u is its argument and $K = K(k)$ is the complete elliptic integral of the first kind. Due to the smallness of q even for large values of k and the dependence of the frequency of w on k one may expect that expansion (5.2) has three advantages as compared with (5.1), i.e. a) its applicability for large values of x, b) compact form of coefficients (finite rational expressions for g_m and power series for f_m), and c) more compact form of the Fourier series themselves. In such a sense introducing of elliptic function expansions may be regarded as the accelerator of practical convergence of the series like (5.1). Of course, even more fast converging expansions may be obtained by using theta functions. But no such expansion is known for the amplitude function $\mathrm{am}\, u$ needed for the inversion problem. Besides, these functions involve more complicated operations on rational functions of Poisson series. For these reasons we consider below only Jacobi function expansions.

6. GPT (general planetary theory)

The final aim of GPT is to represent the motion of the major planets without fictitious secular terms. As presented in (Brumberg, 1992) GPT involves multipower series in eccentricity and inclination variables reducing eventually the original differential equations to the autonomous secular system. The coefficients of the GPT series are periodic functions of the differences of the mean longitudes $\lambda_i - \lambda_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ and may be presented in three versions :

a) trigonometric series in multiples of $\lambda_i - \lambda_j$ (Brumberg and Chapront, 1973),

b) the closed form valid for the first-order theory (Brumberg, 1994),

c) trigonometric series in multiples of elliptic arguments $\pi u_{ij}/K(k_{ij})$ with

$$k_{ij}^2 = \frac{4a_i a_j}{(a_i + a_j)^2}\,, \qquad 2\,\mathrm{am}(u_{ij},\, k_{ij}) = \pi - (\lambda_i - \lambda_j), \tag{6.1}$$

a_i being the planetary semi-major axes. One may expect that (c)-series turn out to be much faster converging as compared with (a)-series. The most difficult case in the major planet theory is related to the pair Venus–Earth where the ratio α of the semi-major axes is $\alpha = 0.723$. The corresponding values of modulus k and Jacobi nome q are $k = 0.987$ and $q = 0.215$. For this case it might be reasonable to use α instead of k as the modulus of Jacobi elliptic functions. This is equivalent to Landen transformation from k_{ij} and u_{ij} to new elliptic arguments

$$\alpha_{ij} = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{ij}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{ij}^2}}\,, \qquad v_{ij} = \left(1 + \sqrt{1 - k_{ij}^2}\right) u_{ij}\,. \tag{6.2}$$

The corresponding Jacobi nome for the Venus–Earth case is now only $q = 0.04$ and the new trigonometric arguments of the GPT series (d-version) are $\pi v_{ij}/K(\alpha_{ij}) = 2\pi u_{ij}/K(k_{ij})$. But the inversion problem becomes therewith a little bit more complicated since equation (6.1) takes the form

$$\mathrm{am}(v_{ij},\, \alpha_{ij}) + \arcsin\bigl(\alpha_{ij}\, \mathrm{sn}(v_{ij},\, \alpha_{ij})\bigr) = \pi - (\lambda_i - \lambda_j). \tag{6.3}$$

7. High-eccentricity orbits

The elliptic function technique might be useful for the analytical treatment of the perturbed two-body problem with high eccentricity (exceeding, to be more specific, the Laplace limit). It is based on introducing the elliptic anomaly w (E. Brumberg, 1992)

$$w = \frac{\pi u}{2K} - \frac{\pi}{2}, \qquad k = e, \qquad \mathrm{am}\, u = g + \frac{\pi}{2} \tag{7.1}$$

and using the expansion

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \mathrm{i}\, mv = \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s^{n,m}(q) \exp \mathrm{i}\, sw \tag{7.2}$$

instead of the classical expansion

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \mathrm{i}\, mv = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s^{n,m}(e) \exp \mathrm{i}\, sM \tag{7.3}$$

with Hansen coefficients $X_s^{n,m}(e)$. Most simply the coefficients of (7.2) may be computed from the recurrence relations (E.Brumberg and Fukushima, 1994). The relation to the mean anomaly M (Kepler equation) has the form

$$w + \sum_{m=1}^{\infty} d_m(q) \sin mw = M \tag{7.4}$$

where coefficients d_m are of the order $q^{m/2}$ (in GPT the relation (6.1) has the same form (7.4) but with the coefficients of the order q^m). The solution of this Lagrange implicit equation

$$w = M + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(q) \sin mM \tag{7.5}$$

as well as the expansions of the corresponding trigonometric functions

$$\exp \mathrm{i}\, sw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k^{(s)}(q) \exp \mathrm{i}\,(s+k)M \tag{7.6}$$

$$\exp \mathrm{i}\, sM = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^{(s)}(q) \exp \mathrm{i}\,(s+k)w \tag{7.7}$$

may be easily found by computer algebra algorithms (Klioner, 1992).

This technique has been applied to extend Kaula's first-order theory to high eccentric satellite orbits (E.Brumberg et al., 1995). The disturbing function due to the nonsphericity of a primary body as well as its derivatives with respect to e and M have been expanded into Kaula-form trigonometric series with replacing M by w. Having determined the t-secular terms in the angular variables the integration of the Lagrange perturbation equations involves the quadratures of the type

$$T_{pjs} = \int \exp \mathrm{i}\,[p\omega + j(\Omega - \chi) + sw]\, dt \tag{7.8}$$

(without its t-secular part). Here Ω, ω and χ stay for the longitude of the node, argument of the pericentre and a linear function of time due to the rotation of the primary. Substituting (7.6) one easily gets

$$T_{pjs} = -\mathrm{i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k^{(s)}(q) \frac{\exp \mathrm{i}\, \theta_{p,j,s+k}}{\dot{\theta}_{p,j,s+k}} \tag{7.9}$$

with

$$\theta_{pjs} = p\omega + j(\Omega - \chi) + sM. \tag{7.10}$$

In such a way the form of Kaula' s theory is preserved but the coefficients of the trigonometric series are expanded in powers of $\sqrt{q}$ and it is expected that the total member of terms may be not too large.

8. Analytical integration by Hansen device

The problem of taking quadrature (7.8) is a particular case of the more general problem to perform integration

$$I = \int f(s, s')ds\,, \tag{8.1}$$

s and s' being two different angular variables. Such problem occurs in constructing analytical theories (GPT, satellite theory, etc.) beyond the first order. One may always assume herewith that there exist one to one correspondences $s \leftrightarrow M$ and $s' \leftrightarrow M'$, M and M' being linear functions of the same argument (time t) with frequencies n and n', respectively. This involves the validity of an identity

$$M' = \frac{n'}{n}s - \frac{n'}{n}(s - M) + c\,, \qquad c = \mathrm{const}\,. \tag{8.2}$$

The solution of this problem first given by Hansen may be now greatly facilitated by computer algebra. The Hansen device is to introduce a new variable s_1 by putting

$$s_1 = M' + \frac{n'}{n}(s - M)\,. \tag{8.3}$$

This relation determines $s_1 = s_1(s, s')$ in terms of s and s'. On the other hand it may be served as Lagrange implicit equation determining $s' = s'(s, s_1)$ in terms of s and s_1. This determination is performed in two steps, i.e. to solve the implicit equation with respect to s'

$$M' = x \tag{8.4}$$

with

$$x = s_1 - \frac{n'}{n}(s - M) \tag{8.5}$$

and then to express the obtained function $s'(x)$ in terms of s and s_1. In such manner the function $f(s, s')$ is reduced to some function $g(s, s_1)$ which admits the straightforward integration since

$$\int \exp \mathrm{i}(ps + qs_1)ds = \frac{\exp \mathrm{i}(ps + qs_1)}{\mathrm{i}\left(p + q\frac{n'}{n}\right)}\,. \tag{8.6}$$

Substituting $s_1 = s_1(s, s')$ one may restore the original form of the integrand function in terms of s and s'.

The techniques exposed in this note may be found in more detail in papers cited above and in monograph (Brumberg, 1995).

References

Brumberg E. 1992. In : Kinoshita H. and Nakai H. (eds.), 139

Brumberg E. and Fukushima T. 1994. Celes. Mech. **60**, 69

Brumberg E., Brumberg V.A., Konrad Th. and Soffel M. 1995. Celes. Mech. (submitted)

Brumberg V.A. 1992. In : Kinoshita H. and Nakai H. (eds.), 156

Brumberg V.A. 1994. Celes. Mech. **59**, 1

Brumberg V.A. 1995. Analytical Techniques of Celestial Mechanics. 1995. Springer, Heidelberg (in press)

Brumberg V.A. and Chapront J. 1973. Celes. Mech. **8**, 335

Brumberg V.A., Tarasevich S.V. and Vasiliev N.N. 1989. Celes. Mech. **45**, 149

Damour T. and Deruelle N. 1985. Ann. Inst. Henri Poincaré **43**, 107

Damour T. and Schäfer G. 1988. Nuovo Cimento B **101**, 127

Deprit A. and Ferrer S. 1989. J. Astronaut. Sci. **37**, 451

Egorova A.V. 1960. Bull. ITA **7**, 815 (in Russian)

Jefferys W.H. 1971. Celes. Mech. **3**, 390

Kinoshita H. and Nakai H. (eds.) 1992. Proc. 25th. Symp. on Celestial Mechanics, NAO, Tokyo

Klioner S.A. 1992. In : Kinoshita H. and Nakai H. (eds.), 172

Klioner S.A. and Kopeikin S.M. 1994. Ap. J. **427**, 951

Osácar C. and Palacián J. 1994. Celes. Mech. **60**, 207

Schäfer G. and Wex N. 1993. Physics Letters A **174**, 196 (Errata : **177**, 461, 1993)

CHAOS À GRANDE ÉCHELLE DANS LE SYSTÈME SOLAIRE

J. Laskar

manuscrit non parvenu

MODÈLE POUR L'ÉTUDE DES VARIATIONS A LONG TERME DES OBLIQUITÉS DES PLANÈTES

O. Néron de Surgy

1. Introduction

Les travaux récents (Laskar, Joutel, Robutel, 1993) et (Laskar, Robutel, 1993) ont montré les résultats suivants : l'inclinaison de l'axe de rotation d'une planète par rapport à la normale à son plan orbital (qu'on appelle obliquité) est dans certaines conditions très sensible aux perturbations des autres planètes et présente de larges variations chaotiques en quelques millions d'années. C'est effectivement le cas de Mars. La Terre, quant à elle, s'avère préservée de ce type de phénomène grâce à la présence de la Lune.

On s'intéresse ici aux variations d'obliquité des planètes telluriques sur une échelle de temps beaucoup plus grande, comparable à l'âge du système solaire, afin d'obtenir des scénarios d'évolution réalistes sur plus d'un milliard d'années. On doit pour cela prendre en compte certains effets non conservatifs qui s'exercent sur les planètes, tels que les effets de marées ou la friction visqueuse entre le noyau et le manteau planétaire.

Je rappelle d'abord la stratégie utilisée pour la modélisation et l'étude de la rotation planétaire à long terme dans un cadre conservatif. J'explique ensuite brièvement comment on peut prendre en compte les différents effets de marées et de friction entre le noyau et le manteau.

2. Les équations moyennées de la précession

On considère la planète comme un solide rigide de moments principaux d'inertie $A < B < C$, d'axe de rotation confondu avec l'axe de principale inertie et on limite le développement du potentiel gravitationnel au deuxième harmonique sphérique. Les équations de variation de précession ψ et d'obliquité ϵ, les deux angles qui déterminent l'orientation de la planète — isolée des autres dans le cas présent — s'écrivent après une moyenne sur les mouvements à courtes périodes que sont la rotation diurne et la révolution orbitale :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \alpha \cos \epsilon \\ \dot{\epsilon} = 0 \end{cases}$$

où α est la constante de précession.

Le mouvement orbital étant perturbé par les autres planètes, il apparaît dans les seconds membres du précédent système des termes de la forme $\sum_k A_k \sin(\nu_k t + \phi_k)$. Les A_k sont des fonctions de l'inclinaison et de la longitude du nœud ascendant et de leurs dérivées temporelles de l'orbite de la planète considérée, et les ν_k sont des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales du système solaire. Toutes ces quantités sont déterminées par une intégration de ce dernier sur un temps de l'ordre de vingt millions d'années (Laskar, Joutel, Boudin, 1992). Ces termes peuvent engendrer des résonances avec la fréquence de précession, causes de larges variations chaotiques de ϵ. Pour étudier la dynamique globale de l'obliquité, on effectue une analyse en fréquence du système pour un large éventail d'obliquités initiales (Laskar, Joutel, Robutel, 1993), (Laskar, Robutel, 1993).

3. Contribution des effets dissipatifs

3.1. effets de marées de corps

Les théories des effets de marées se fondent généralement sur la proposition suivante, due à Love. Le potentiel de marées dû à la déformation engendrée par l'attraction gravitationnelle différentielle d'un corps perturbateur (e.g. le Soleil) situé à la distance x du centre d'une planète élastique vaut en un point situé à la surface de cette dernière :

$$V_m(x, R) = \sum_{i \geq 2} k_i V_i(x, R)$$

où R est le rayon planétaire, k_i le i^{eme} nombre de Love et V_i le i^{eme} harmonique sphérique. Dans la pratique, il suffit de ne retenir que le terme correspondant à $i = 2$. Ce potentiel calculé en un point situé à une distance $x' > x$ s'obtient en résolvant un problème de Dirichlet (Lambeck, 1980) :

$$V_m(x, x') = k_2 \left(\frac{R}{x'}\right)^5 V_2(x, x').$$

Si la planète était parfaitement élastique, on obtiendrait le potentiel de marées avec $x = x'$, la distance du corps perturbateur. Mais du fait de la viscosité du manteau planétaire et d'une éventuelle friction océanique, un petit déphasage de temps Δt (Mignard, 1979) est nécessaire pour atteindre un état d'équilibre. La quantité Δt ne dépend que des caractéristiques physiques de la planète. Si pour la Terre on ne peut le modéliser même grossièrement à cause de la très complexe friction océanique (Zschau, 1978), on sait grâce aux mesures de la vitesse d'éloignement de la Lune que ce temps vaut actuellement une dizaine de minutes (Mignard, 1979). Le potentiel cherché est donc :

$$V_m(x^*, x) = -k_2 \frac{GmR^5}{{x^*}^3 x^3} P_2(\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x})$$

où m est la masse du corps perturbateur, P_2 le second polynôme de Legendre, $x^* = x(t - \Delta t)$ et $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}$ le cosinus de l'angle entre les directions aux instants t et $t - \Delta t$ du corps perturbateur.

Il existe bien sûr d'autres façons de modéliser ces effets mais l'approche de Mignard, outre sa clarté, présente un avantage de simplicité qui est de mise pour des intégrations à long terme.

En figure 1 est portée une illustration classique de l'effet de marée à obliquité nulle.

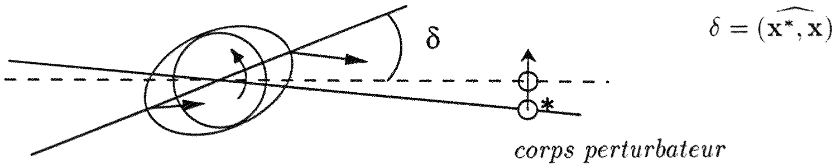

Figure 1. *Couple de marées de corps à obliquité nulle.*

Du potentiel précédemment défini, on doit déduire les équations de ralentissement de la vitesse de rotation planétaire, de la variation d'obliquité, et dans le cas de la Terre, des variations du demi grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison sur l'écliptique de la Lune. On pourra par exemple utiliser les formules de (Mignard, 1981) qui découlent d'une formulation vectorielle des effets de marées, mais ce choix n'est pas encore arrêté.

3.2. effets de marées atmosphériques thermiques

Si une planète proche du Soleil possède une atmosphère importante, l'échauffement de cette dernière modifie sa distribution de pression de façon à créer un renflement de masse. Comme pour les marées de corps, ce renflement est, à cause des frottements atmosphériques, déphasé d'un temps $\Delta t'$ à l'équilibre et engendre un couple qui agit sur la vitesse et la direction de la rotation (voir fig.2). Là encore, il suffit de ne retenir que le deuxième harmonique du potentiel correspondant. Un travail pionnier dans l'estimation de cet effet est (Dobrovolskis, 1979), mais comme on peut le modéliser d'une façon analogue à l'effet de marée de corps, je choisis de conserver l'approche de Mignard, comme il est fait dans (McCue, Dormand, 1993). Dans le cas présent et contrairement aux marées de corps, la direction du renflement précède celle du Soleil, d'où un couple accélérateur.

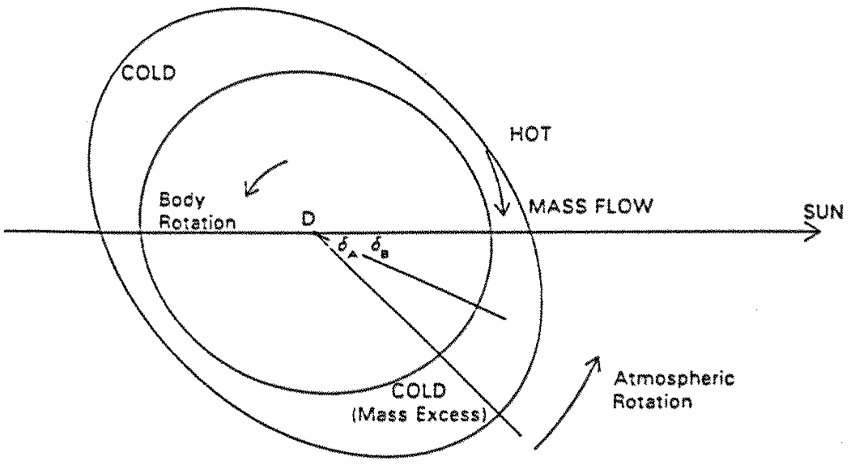

Figure 2. *Couple de marées atmosphériques à obliquité nulle* (McCue, Dormand, 1993).

3.3. friction noyau/manteau

Je me base sur le modèle (Rochester, 1976). Le noyau et le manteau n'ont pas la même densité. Ils tendent donc à précesser différemment, ce qui provoque une friction visqueuse à leur frontière. S'exerce aussi une friction magnétique due à la présence de courants électriques dans le noyau. Enfin, deux couples tendent à solidariser le noyau et le manteau : le couple inertiel **N** dû aux forces de pression à la frontière et le couple topographique **T** (Hide, 1969) dû à des déformations de cette frontière qui a pour effet de cranter le noyau dans le manteau. Le théorème du moment cinétique appliqué au noyau n et au manteau m se traduit par le système

$$\begin{cases} \dfrac{d(C_n\overrightarrow{\omega_n})}{dt} = \mathbf{P}_n + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F} \\ \dfrac{d(C_m\overrightarrow{\omega_m})}{dt} = \mathbf{P}_m - \mathbf{N} - \mathbf{T} - \mathbf{F} \end{cases}$$

où $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_m$ et $\mathbf{F}$ sont respectivement les couples de précession et la somme des couples de friction, et la lettre C représentant le moment principal d'inertie. Comme **T** est difficile à estimer et que l'on cherche plutôt à majorer les effets de friction, je l'ignore. D'autre part, si le coefficient de friction visqueuse — très mal connu encore aujourd'hui — est probablement plus faible que celui de la friction magnétique, il est très vraisemblable que des effets de turbulence au voisinage de la frontière rendent la viscosité bien plus efficace que les phénomènes électromagnétiques (Lumb, Aldridge, 1991), (Williams, 1993). En ce qui concerne sa magnitude, il semble que $\nu = 10\ m^2s^{-1}$ soit une borne supérieure raisonnable pour la viscosité efficace (Lumb, Aldridge, 1991), (Toomre, 1974).

A l'aide de (Goldreich, Peale, 1970) qui propose un modèle de friction interne pour Vénus, je déduis de (Rochester, 1976) les contributions cherchées pour les variations du moment cinétique de rotation L et de l'obliquité :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dL}{dt}\right)_f = -\dfrac{C_n C_m \dot{\psi}^2\sqrt{\nu}}{\gamma\sqrt{LC}{R_n}^2{\varepsilon_n}^2}\sin^2\epsilon \\ \left(\dfrac{d\cos\epsilon}{dt}\right)_f = -\dfrac{\cos\epsilon}{L}\left(\dfrac{dL}{dt}\right)_f \end{cases}$$

où $\gamma = 0.57$ et où R_n et ε_n sont le rayon et l'ellipticité dynamique du noyau.

Notons que cette friction a pour effet d'amener le plan équatorial parallèlement au plan de l'écliptique. D'autre part, les incertitudes sur la valeur de ν posent un problème car cette dernière décide de la tendance de l'obliquité à augmenter ou à diminuer.

3.4. Qui subit quoi ?

En ce qui concerne les planètes intérieures du système solaire, toutes sont a priori assujetties à la friction entre le noyau et le manteau, et seule Vénus subit des marées atmosphériques significatives. Toutes subissent aussi les marées de corps qui sont très faibles sur Mars alors qu'elles ont fortement ralenti Vénus et Mercure, cette dernière ayant tôt été capturée en résonance spin–orbite 3 : 2 (sa période de révolution vaut une fois et demie sa période de rotation) ; cette résonance contraint à intégrer une équation supplémentaire. Notons enfin que dans le cas de la Terre, les effets de marées ont des origines solaire et lunaire, cette dernière comptant environ pour quatre cinquièmes du ralentissement de la rotation terrestre.

Conclusion

Les principaux facteurs d'évolution à long terme de l'obliquité sont à présent réunis pour effectuer des simulations réalistes et rapides du fait de la simplicité des équations. Quoi qu'il en soit, il ne s'agit pas de donner un scénario tout à fait authentique pour cette évolution au cours de quatre milliards et demi d'années. Cette tâche est notamment rendue délicate par la faible connaissance des variations sur une telle période de caractéristiques physiques telles que ν ou Δt. Il s'agit surtout de comprendre les comportements possibles du système, en particulier le rôle des effets dissipatifs au voisinage des résonances séculaires dues aux perturbations planétaires, et discerner ainsi les différences entre le cadre conservatif et le cadre dissipatif.

Références

Dobrovolskis A.R. : 1979, Atmospheric tides and the rotation of Venus : II. Spin evolution, *Icarus*, **41**, (18).

Goldreich P., Peale S. : 1970, The obliquity of Venus, *Astron.J.*, **75**, (273-284).

Hide R. : 1976, Interaction between the Earth's liquid core and solid mantle, *Nature*, **222**, (1055).

Lambeck K. : 1980, The Earth's variable rotation, *Cambridge University Press.* Laskar J., Joutel F., Boudin F. : 1993, Orbital, precesionnal, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to $+10$ Myr, *Astron. Astrophys.*, **270**, (522-533).

Laskar J., Joutel F., Robutel P. : 1993, Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon, *Nature*, **361**, (615-617).

Laskar J., Robutel P. : 1993, The chaotic obliquities of the planets, *Nature*, **361**, (608-612).

Lumb L.I., Aldridge K.D. : 1991, On viscosity estimates for the Earth's fluid outer core and core-mantle coupling, *J. Geophys. Geoelectr.*, **43**, (93-110).

McCue J., Dormand J.R. : 1993, Evolution of the spin of Venus, *Earth Moon and Planets*, **63**, (209-225).

Mignard F. : 1979, The evolution of the lunar orbit revisited (partI), *Moon and Planets*, **20**, (301-315).

Mignard F. : 1981, The evolution of the lunar orbit revisited (partIII), *Moon and Planets*, **24**, (189-207).

Rochester M.G. : 1976, The secular decrease of obliquity due to dissipative core-mantle coupling, *Geophys.J.R.A.S.*, **46**, (109-126).

Toomre A. : 1974, On the 'nearly diurnal wobble' of the Earth, *Geophys.J.R.A.S.*, **38**, (335).

Williams G.E. : 1993, History of the Earth's obliquity, *Earth-Science review*, **34**, (1-45).

Zschau J. : 1978, Tidal friction in the solid Earth : loading tides versus body tides, *Tidal friction and the Earth's rotation (Brosche and Sündermann, Springer)*, **I**, (62-94).

APPLICATION DE L'ANALYSE EN FRÉQUENCE DANS UN POTENTIEL GALACTIQUE A 2 DEGRÉS DE LIBERTÉ

Y. Papaphilippou

L'analyse en fréquence de Laskar (1992,1993) est une nouvelle méthode pour l'étude des systèmes dynamiques conservatifs. On a tenté dans ce travail d'une part de démontrer l'impact de cette nouvelle approche en dynamique galactique et d'autre part de clarifier la dynamique du potentiel logarithmique, beaucoup cité dans la littérature comme modèle d'une galaxie barrée où des halos galactiques (Binney and Tremaine, 1987).

Le Hamiltonien du système est :

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \ln(x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2) \tag{1}$$

où (x, X) et (y, Y) sont des paires des variables conjuguées, q est le paramètre de non-axisymétrie et R_c une constante pour enlever la singularité logarithmique du centre du potentiel.

Pour $q = 0.9$, il existe principalement deux familles d'orbites, dont on peut remarquer facilement sur une surface de section, pour $y = 0$ (figure 1a) : les orbites boucles ("loops" - figure 1c) et les orbites boîtes ("boxes" - figure 1d). Ces deux types d'orbites peuvent être connectés avec deux orbites périodiques qui proviennent des deux systèmes intégrables générés pour des conditions spéciales du Hamiltonien général.

Les études des potentiels galactiques présentent souvent des complexités qui proviennent du choix des variables. Les variables utilisées sont effectivement loin des variables actions-angles, lesquelles simplifient en principe l'étude de la dynamique d'un système. Ces variables décrivent les mouvements quasi-périodiques sur des tores invariants dans le cas d'un système intégrable, ou sur les tores déformés, qui persistent dans le cas d'un système proche d'intégrable. Malheureusement, les méthodes (semi-) numériques qui calculent ce genre de variables présentent des difficultés supplémentaires surtout quand la perturbation est élevée.

En revanche, l'analyse de l'application fréquence est basée sur une autre caractéristique du mouvement quasi-périodique, les fréquences fondamentales. Ces dernières peuvent être calculées d'une manière concise en utilisant un algorithme puissant (NAFF). Les aspects principaux de l'analyse en fréquence sont doubles. Tout d'abord, elle calcule une approximation quasi-périodique sous forme de série d'harmoniques pour une fonction déterminée numériquement. Ces approximations reconstruisent les tores et peuvent être très utiles en dynamiques galactiques pour tester l'autoconsistence d'un potentiel modèle (Schwarzschild, 1979). Le deuxième et en fait l'aspect le plus important de la méthode est la représentation de la dynamique globale du système par l'analyse de l'application fréquence. Plus exactement, on peut déterminer les fréquences fondamentales qui caractérisent ce mouvement quasi-périodique. Ainsi, on peut étudier la régularité de l'application fréquence $J \longmapsto \nu$, ou J sont des variables du type action.

Dans les figures 2 et 3 on représente les applications fréquences pour trois valeurs du paramètre de perturbation q (0.9, 0.8 et 0.7), pour les régions de l'espace de phase occupées par les orbites boîtes (nombre de rotation en fonction de x) et pour les orbites boucles (nombre de rotation en fonction de X), respectivement. Alors, on peut observer l'existence des zones chaotiques (points dispersés), les principales îles elliptiques (plateaux) dont on peut calculer la taille et les points hyperboliques (fractures de la courbe) qui correspondent à des résonances que l'on peut identifier facilement. En outre, comme ces résonances indiquent l'existence des orbites périodiques on peut localiser ces dernières.

Après cette étude préliminaire qui démontre toute la puissance de la méthode, on pense qu'on peut l'appliquer à des potentiels galactiques plus réaliste (3D et en rotation). Dans ce cas, la considération d'orbites irrégulières pour la construction des modèles galactiques doit devenir une nécessité (Kaufmann, 1993), car l'addition du degré de liberté supplémentaire va surement élargir les zones chaotiques (Laskar, 1993).

Références

Binney J. et Spergel D. : 1982, *Astrophys. J.* **252**, 308.

Binney J. et Tremaine S. : 1987, Galactic Dynamics, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.

Kaufmann D.E. : 1993, Self-consistent Models of Barred Spiral Galaxies, PhD Thesis, Un. of Florida.

Laskar J. : 1993, *Physica D* **67**, 257.

Laskar J., Froeschlé C. et Celleti A. : 1992, *Physica D* **56**, 253.

Richestone D. : 1982, *Astrophys. J.* **252**, 496.

Papaphilippou Y. et Laskar J. : 1995, *en préparation.*

Schwarzschild M. : 1979, *Astrophys. J.* **232**, 236.

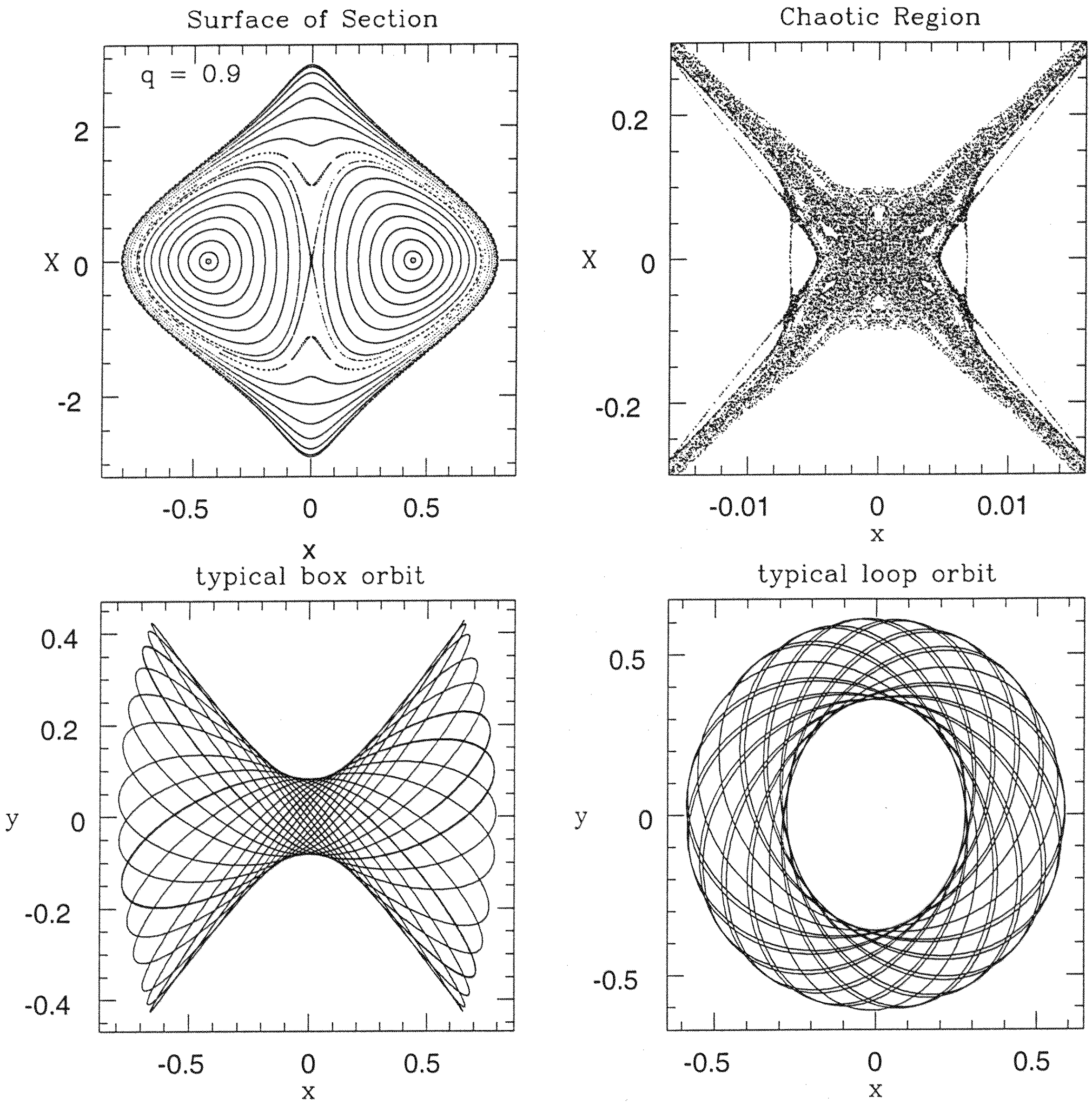

Figure 1. *(a) Surface de section $y = 0$ du système logarithmique pour $q = 0.9$ et (b) un "zoom" au voisinage de l'intersection de l'orbite hyperbolique $x = X = 0$ avec cette surface. (c) Orbite boîte typique et (d) orbite boucle typique dans l'espace de configuration.*