MODÈLE POUR L'ÉTUDE DES VARIATIONS A LONG TERME DES OBLIQUITÉS DES PLANÈTES

O. Néron de Surgy

1. Introduction

Les travaux récents (Laskar, Joutel, Robutel, 1993) et (Laskar et Robutel, 1993) ont montré les résultats suivants : l'inclinaison de l'axe de rotation d'une planète par rapport à la normale à son plan orbital (qu'on appelle obliquité) est dans certaines conditions très sensible aux perturbations des autres planètes et présente de larges variations chaotiques en quelques millions d'années. C'est effectivement le cas de Mars. La Terre, quant à elle, s'avère préservée de ce type de phénomène grâce à la présence de la Lune.

On s'intéresse ici aux variations d'obliquité des planètes telluriques sur une échelle de temps beaucoup plus grande, comparable à l'âge du système solaire, afin d'obtenir des scénarios d'évolution réalistes sur plus d'un milliard d'années. On doit pour cela prendre en compte certains effets non conservatifs qui s'exercent sur les planètes, tels que les effets de marées ou la friction visqueuse entre le noyau et le manteau planétaire.

Je rappelle d'abord la stratégie utilisée pour la modélisation et l'étude de la rotation planétaire à long terme dans un cadre conservatif. J'explique ensuite brièvement comment on peut prendre en compte les différents effets de marées et de friction entre le noyau et le manteau.

2. Les équations moyennées de la précession

On considère la planète comme un solide rigide de moments principaux d'inertie $A < B < C$, d'axe de rotation confondu avec l'axe de principale inertie et on limite le développement du potentiel gravitationnel au deuxième harmonique sphérique. Les équations de variation de précession ψ et d'obliquité ϵ, les deux angles qui déterminent l'orientation de la planète — isolée des autres dans le cas présent — s'écrivent après une moyenne sur les mouvements à courtes périodes que sont la rotation diurne et la révolution orbitale :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \alpha \cos \epsilon \\ \dot{\epsilon} = 0 \end{cases}$$

où α est la constante de précession.

Le mouvement orbital étant perturbé par les autres planètes, il apparaît dans les seconds membres du précédent système des termes de la forme $\sum_k A_k \sin(\nu_k t + \phi_k)$. Les A_k sont des fonctions de l'inclinaison et de la longitude du nœud ascendant et de leurs dérivées temporelles de l'orbite de la planète considérée, et les ν_k sont des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales du système solaire. Toutes ces quantités sont déterminées par une intégration de ce dernier sur un temps de l'ordre de vingt millions d'années (Laskar, Joutel, Boudin, 1992). Ces termes peuvent engendrer des résonances avec la fréquence de précession, cause de larges variations chaotiques de ϵ. Pour étudier la dynamique globale de l'obliquité, on effectue une analyse en fréquence du système pour un large éventail d'obliquités initiales (Laskar, Joutel, Robutel, 1993 ; Laskar et Robutel, 1993).

3. Contribution des effets dissipatifs

3.1. effets de marées de corps

Les théories des effets de marées se fondent généralement sur la proposition suivante, due à Love. Le potentiel de marées dû à la déformation engendrée par l'attraction gravitationnelle différentielle d'un corps perturbateur (e.g. le Soleil) situé à la distance x du centre d'une planète élastique vaut en un point situé à la surface de cette dernière :

$$V_m(x, R) = \sum_{i \geq 2} k_i V_i(x, R)$$

où R est le rayon planétaire, k_i le i^{eme} nombre de Love et V_i le i^{eme} harmonique sphérique. Dans la pratique, il suffit de ne retenir que le terme correspondant à $i = 2$. Ce potentiel calculé en un point situé à une distance $x' > x$ s'obtient en résolvant un problème de Dirichlet (Lambeck, 1980) :

$$V_m(x, x') = k_2 \left(\frac{R}{x'}\right)^5 V_2(x, x').$$

Si la planète était parfaitement élastique, on obtiendrait le potentiel de marées avec $x = x'$, la distance du corps perturbateur. Mais du fait de la viscosité du manteau planétaire et d'une éventuelle friction océanique, un petit déphasage de temps Δt (Mignard, 1979) est nécessaire pour atteindre un état d'équilibre. La quantité Δt ne dépend que des caractéristiques physiques de la planète. Si pour la Terre on ne peut le modéliser même grossièrement à cause de la très complexe friction océanique (Zschau, 1978), on sait grâce aux mesures de la vitesse d'éloignement de la Lune que ce temps vaut actuellement une dizaine de minutes (Mignard, 1979). Le potentiel cherché est donc :

$$V_m(x^*, x) = -k_2 \frac{GmR^5}{{x^*}^3 x^3} P_2(\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x})$$

où m est la masse du corps perturbateur, P_2 le second polynôme de Legendre, $x^* = x(t - \Delta t)$ et $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}$ le cosinus de l'angle entre les directions aux instants t et $t - \Delta t$ du corps perturbateur.

Il existe bien sûr d'autres façons de modéliser ces effets mais l'approche de Mignard, outre sa clarté, présente un avantage de simplicité qui est de mise pour des intégrations à long terme.

En figure 1 est portée une illustration classique de l'effet de marée à obliquité nulle.

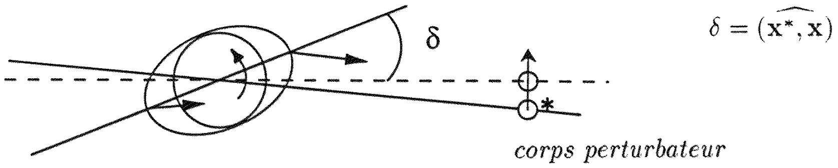

Figure 1. *Couple de marées de corps à obliquité nulle.*

Du potentiel précédemment défini, on doit déduire les équations de ralentissement de la vitesse de rotation planétaire, de la variation d'obliquité, et dans le cas de la Terre, des variations du demi grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison sur l'écliptique de la Lune. On pourra par exemple utiliser les formules de (Mignard, 1981) qui découlent d'une formulation vectorielle des effets de marées, mais ce choix n'est pas encore arrêté.

3.2. effets de marées atmosphériques thermiques

Si une planète proche du Soleil possède une atmosphère importante, l'échauffement de cette dernière modifie sa distribution de pression de façon à créer un renflement de masse. Comme pour les marées de corps, ce renflement est, à cause des frottements atmosphériques, déphasé d'un temps $\Delta t'$ à l'équilibre et engendre un couple qui agit sur la vitesse et la direction de la rotation (voir fig.2). Là encore, il suffit de ne retenir que le deuxième harmonique du potentiel correspondant. Un travail pionnier dans l'estimation de cet effet est (Dobrovolskis, 1979), mais comme on peut le modéliser d'une façon analogue à l'effet de marée de corps, je choisis de conserver l'approche de Mignard, comme il est fait dans (McCue, Dormand, 1993). Dans le cas présent et contrairement aux marées de corps, la direction du renflement précède celle du Soleil, d'où un couple accélérateur.

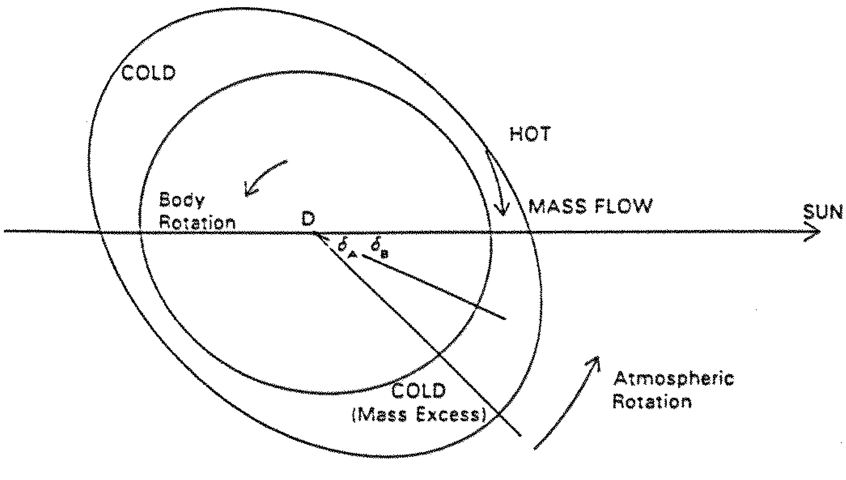

Figure 2. *Couple de marées atmosphériques à obliquité nulle* (McCue, Dormand, 1993).

3.3. friction noyau/manteau

Je me base sur le modèle (Rochester, 1976). Le noyau et le manteau n'ont pas la même densité. Ils tendent donc à précesser différemment, ce qui provoque une friction visqueuse à leur frontière. S'exerce aussi une friction magnétique due à la présence de courants électriques dans le noyau. Enfin, deux couples tendent à solidariser le noyau et le manteau : le couple inertiel **N** dû aux forces de pression à la frontière et le couple topographique **T** (Hide, 1969) dû à des déformations de cette frontière qui a pour effet de cranter le noyau dans le manteau. Le théorème du moment cinétique appliqué au noyau n et au manteau m se traduit par le système

$$\begin{cases} \dfrac{d(C_n\overrightarrow{\omega_n})}{dt} = \mathbf{P}_n + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F} \\ \dfrac{d(C_m\overrightarrow{\omega_m})}{dt} = \mathbf{P}_m - \mathbf{N} - \mathbf{T} - \mathbf{F} \end{cases}$$

où $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_m$ et $\mathbf{F}$ sont respectivement les couples de précession et la somme des couples de friction, et la lettre C représentant le moment principal d'inertie. Comme **T** est difficile à estimer et que l'on cherche plutôt à majorer les effets de friction, je l'ignore. D'autre part, si le coefficient de friction visqueuse — très mal connu encore aujourd'hui — est probablement plus faible que celui de la friction magnétique, il est très vraisemblable que des effets de turbulence au voisinage de la frontière rendent la viscosité bien plus efficace que les phénomènes électromagnétiques (Lumb, Aldridge, 1991), (Williams, 1993). En ce qui concerne sa magnitude, il semble que $\nu = 10\ m^2 s^{-1}$ soit une borne supérieure raisonnable pour la viscosité efficace (Lumb, Aldridge, 1991), (Toomre, 1974).

A l'aide de (Goldreich, Peale, 1970) qui propose un modèle de friction interne pour Vénus, je déduis de (Rochester, 1976) les contributions cherchées pour les variations du moment cinétique de rotation L et de l'obliquité :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dL}{dt}\right)_f = -\dfrac{C_n C_m \dot{\psi}^2 \sqrt{\nu}}{\gamma\sqrt{LC}{R_n}^2{\varepsilon_n}^2}\sin^2\epsilon \\ \left(\dfrac{d\cos\epsilon}{dt}\right)_f = -\dfrac{\cos\epsilon}{L}\left(\dfrac{dL}{dt}\right)_f \end{cases}$$

où $\gamma = 0.57$ et où R_n et ε_n sont le rayon et l'ellipticité dynamique du noyau.

Notons que cette friction a pour effet d'amener le plan équatorial parallèlement au plan de l'écliptique. D'autre part, les incertitudes sur la valeur de ν posent un problème car cette dernière décide de la tendance de l'obliquité à augmenter ou à diminuer.

3.4. Qui subit quoi ?

En ce qui concerne les planètes intérieures du système solaire, toutes sont a priori assujetties à la friction entre le noyau et le manteau, et seule Vénus subit des marées atmosphériques significatives. Toutes subissent aussi les marées de corps qui sont très faibles sur Mars alors qu'elles ont fortement ralenti Vénus et Mercure, cette dernière ayant tôt été capturée en résonance spin–orbite 3 : 2 (sa période de révolution vaut une fois et demie sa période de rotation) ; cette résonance contraint à intégrer une équation supplémentaire. Notons enfin que dans le cas de la Terre, les effets de marées ont des origines solaire et lunaire, cette dernière comptant environ pour quatre cinquièmes du ralentissement de la rotation terrestre.

Conclusion

Les principaux facteurs d'évolution à long terme de l'obliquité sont à présent réunis pour effectuer des simulations réalistes et rapides du fait de la simplicité des équations. Quoi qu'il en soit, il ne s'agit pas de donner un scénario tout à fait authentique pour cette évolution au cours de quatre milliards et demi d'années. Cette tâche est notamment rendue délicate par la faible connaissance des variations sur une telle période de caractéristiques physiques telles que ν ou Δt. Il s'agit surtout de comprendre les comportements possibles du système, en particulier le rôle des effets dissipatifs au voisinage des résonances séculaires dues aux perturbations planétaires, et discerner ainsi les différences entre le cadre conservatif et le cadre dissipatif.

Références

Dobrovolskis A.R. : 1979, Atmospheric tides and the rotation of Venus : II. Spin evolution, *Icarus*, **41**, (18).

Goldreich P., Peale S. : 1970, The obliquity of Venus, *Astron.J.*, **75**, (273-284).

Hide R. : 1976, Interaction between the Earth's liquid core and solid mantle, *Nature*, **222**, (1055).

Lambeck K. : 1980, The Earth's variable rotation, *Cambridge University Press*. Laskar J., Joutel F., Boudin F. : 1993, Orbital, precesionnal, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to $+10$ Myr, *Astron. Astrophys.*, **270**, (522-533).

Laskar J., Joutel F., Robutel P. : 1993, Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon, *Nature*, **361**, (615-617).

Laskar J., Robutel P. : 1993, The chaotic obliquities of the planets, *Nature*, **361**, (608-612).

Lumb L.I., Aldridge K.D. : 1991, On viscosity estimates for the Earth's fluid outer core and core-mantle coupling, *J. Geophys. Geoelectr.*, **43**, (93-110).

McCue J., Dormand J.R. : 1993, Evolution of the spin of Venus, *Earth Moon and Planets*, **63**, (209-225).

Mignard F. : 1979, The evolution of the lunar orbit revisited (partI), *Moon and Planets*, **20**, (301-315).

Mignard F. : 1981, The evolution of the lunar orbit revisited (partIII), *Moon and Planets*, **24**, (189-207).

Rochester M.G. : 1976, The secular decrease of obliquity due to dissipative core-mantle coupling, *Geophys.J.R.A.S.*, **46**, (109-126).

Toomre A. : 1974, On the 'nearly diurnal wobble' of the Earth, *Geophys.J.R.A.S.*, **38**, (335).

Williams G.E. : 1993, History of the Earth's obliquity, *Earth-Science review*, **34**, (1-45).

Zschau J. : 1978, Tidal friction in the solid Earth : loading tides versus body tides, *Tidal friction and the Earth's rotation (Brosche and Sündermann, Springer)*, **I**, (62-94).

APPLICATION DE L'ANALYSE EN FRÉQUENCE DANS UN POTENTIEL GALACTIQUE A 2 DEGRÉS DE LIBERTÉ

Y. Papaphilippou

L'analyse en fréquence de Laskar (1992,1993) est une nouvelle méthode pour l'étude des systèmes dynamiques conservatifs. On a tenté dans ce travail d'une part de démontrer l'impact de cette nouvelle approche en dynamique galactique et d'autre part de clarifier la dynamique du potentiel logarithmique, beaucoup cité dans la littérature comme modèle d'une galaxie barrée où des halos galactiques (Binney and Tremaine, 1987).

Le Hamiltonien du système est :

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \ln(x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2) \tag{1}$$

où (x, X) et (y, Y) sont des paires des variables conjuguées, q est le paramètre de non-axisymétrie et R_c une constante pour enlever la singularité logarithmique du centre du potentiel.

Pour $q = 0.9$, il existe principalement deux familles d'orbites, dont on peut remarquer facilement sur une surface de section, pour $y = 0$ (figure 1a) : les orbites boucles ("loops" - figure 1c) et les orbites boîtes ("boxes" - figure 1d). Ces deux types d'orbites peuvent être connectés avec deux orbites périodiques qui proviennent des deux systèmes intégrables générés pour des conditions spéciales du Hamiltonien général.

Les études des potentiels galactiques présentent souvent des complexités qui proviennent du choix des variables. Les variables utilisées sont effectivement loin des variables actions-angles, lesquelles simplifient en principe l'étude de la dynamique d'un système. Ces variables décrivent les mouvements quasi-périodiques sur des tores invariants dans le cas d'un système intégrable, ou sur les tores déformés, qui persistent dans le cas d'un système proche d'intégrable. Malheureusement, les méthodes (semi-) numériques qui calculent ce genre de variables présentent des difficultés supplémentaires surtout quand la perturbation est élevée.

En revanche, l'analyse de l'application fréquence est basée sur une autre caractéristique du mouvement quasi-périodique, les fréquences fondamentales. Ces dernières peuvent être calculées d'une manière concise en utilisant un algorithme puissant (NAFF). Les aspects principaux de l'analyse en fréquence sont doubles. Tout d'abord, elle calcule une approximation quasi-périodique sous forme de série d'harmoniques pour une fonction déterminée numériquement. Ces approximations reconstruisent les tores et peuvent être très utiles en dynamiques galactiques pour tester l'autoconsistence d'un potentiel modèle (Schwarzschild, 1979). Le deuxième et en fait l'aspect le plus important de la méthode est la représentation de la dynamique globale du système par l'analyse de l'application fréquence. Plus exactement, on peut déterminer les fréquences fondamentales qui caractérisent ce mouvement quasi-périodique. Ainsi, on peut étudier la régularité de l'application fréquence $J \longmapsto \nu$, ou J sont des variables du type action.

Dans les figures 2 et 3 on représente les applications fréquences pour trois valeurs du paramètre de perturbation q (0.9, 0.8 et 0.7), pour les régions de l'espace de phase occupées par les orbites boîtes (nombre de rotation en fonction de x) et pour les orbites boucles (nombre de rotation en fonction de X), respectivement. Alors, on peut observer l'existence des zones chaotiques (points dispersés), les principales îles elliptiques (plateaux) dont on peut calculer la taille et les points hyperboliques (fractures de la courbe) qui correspondent à des résonances que l'on peut identifier facilement. En outre, comme ces résonances indiquent l'existence des orbites périodiques on peut localiser ces dernières.

Après cette étude préliminaire qui démontre toute la puissance de la méthode, on pense qu'on peut l'appliquer à des potentiels galactiques plus réaliste (3D et en rotation). Dans ce cas, la considération d'orbites irrégulières pour la construction des modèles galactiques doit devenir une nécessité (Kaufmann, 1993), car l'addition du degré de liberté supplémentaire va surement élargir les zones chaotiques (Laskar, 1993).

Références

Binney J. et Spergel D. : 1982, *Astrophys. J.* **252**, 308.

Binney J. et Tremaine S. : 1987, Galactic Dynamics, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.

Kaufmann D.E. : 1993, Self-consistent Models of Barred Spiral Galaxies, PhD Thesis, Un. of Florida.

Laskar J. : 1993, *Physica D* **67**, 257.

Laskar J., Froeschlé C. et Celleti A. : 1992, *Physica D* **56**, 253.

Richestone D. : 1982, *Astrophys. J.* **252**, 496.

Papaphilippou Y. et Laskar J. : 1995, *en préparation.*

Schwarzschild M. : 1979, *Astrophys. J.* **232**, 236.