THÉORIE DES GROSSES PLANÈTES AVEC DES VALEURS RÉCENTES DES MASSES

J. L. Simon

1. Introduction

La théorie des grosses planètes que nous présentons ici est la troisième étape d'un travail commencé par le calcul des perturbations mutuelles du couple Jupiter-Saturne (Simon et Joutel, 1990) et continué par le calcul des perturbations mutuelles des quatre grosses planètes (Simon et al., 1992). Les perturbations planétaires sont calculées par analyse harmonique suivant un processus itératif, sous forme de séries de Poisson d'une seule variable angulaire. La théorie contient les perturbations apportées par les planètes intérieures et a été construite avec des valeurs modernes des masses des grosses planètes.

2. Forme de la solution

2.1 Notations

Les variables utilisées sont les variables elliptiques classiques : $a, \lambda, e, \varpi, \gamma = \sin \frac{i}{2}, \Omega, k = e\cos\varpi, h = e\sin\varpi, q = \gamma\cos\Omega, p = \gamma\sin\Omega$. Nous désignerons par x l'une quelconque de ces variables et par x^0 la constante d'intégration de x. Nous notons $\bar{\lambda}$ la longitude moyenne moyenne définie par $\bar{\lambda} = \lambda^0 + Nt$ où λ^0 désigne la constante d'intégration de la longitude moyenne λ et où N est le moyen mouvement moyen de la planète. Nous numéroterons de 5 à 8 les quatre grosses planètes prises dans l'ordre Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune.

2.2 Représentation à un argument angulaire

Notre théorie est une théorie à variations séculaires. Les solutions sont développées sous forme de séries de Poisson de la forme :

$$x = x^0 + x^1\, t + x^2\, t^2 + ... + x^j\, t^j + S_0 + t\, S_1 + ... + t^j\, S_j\,, \tag{1}$$

où t représente le temps, $x^0, x^1, x^2, ..., x^j$ sont des coefficients numériques et $S_0, S_1, ..., S_j$ sont des séries de Fourier dont les arguments sont des multiples d'un seul argument de base μ. Les séries S_q ont la forme :

$$S_q = \sum_r \{A_r \cos\, r\mu + B_r \sin\, r\mu\}\,, \tag{2}$$

où r est un entier positif ou nul. μ est une fonction linéaire du temps défini par :

$$\mu = \frac{(N_5 - N_6)t}{880} = 0,3595\, t \tag{3}$$

μ a une période de 17 485 ans. Les longitudes moyennes moyennes sont reliées à μ par des relations du type :

$$\bar{\lambda}_i = q_i \mu + \varepsilon_i t\,, \tag{4}$$

où les q_i sont des entiers fixés et où les ε_i sont des quantités petites devant les moyens mouvements moyens des quatre grosses planètes.

Un tel choix de l'argument μ permet d'obtenir des solutions du mouvement de Jupiter et Saturne beaucoup plus compactes et plus précises que les solutions classiques (Simon et al., 1992).

2.3 Construction de la solution

Les équations du mouvement sont les équations de Lagrange. Elles sont intégrées par une méthode itérative basée sur l'analyse harmonique (Simon et Joutel, 1988). Les développements (1) ont été calculés avec $j = 10$ pour Jupiter et Saturne, $j = 8$ pour Uranus et Neptune, de façon à construire une théorie de grande précision sur l'intervalle de temps $J2000 - 6000, J2000 + 6000$.

3. Perturbations par les planètes intérieures

Nous avons calculé les perturbations par les planètes intérieures de la façon suivante :

• Nous avons complété notre solution avec les perturbations aux ordres 1, 2 et 3 des masses dues aux planètes intérieures, issues de la théorie VSOP82 (Bretagnon, 1982) et transformées en séries de Poisson de μ.

• Nous avons introduit ces perturbations dans nos itérations, obtenant ainsi les perturbations d'ordre 4 des masses apportées par les planètes intérieures ainsi qu'une partie des perturbations d'ordre supérieur. Le tableau 1 donne, pour la longitude de Saturne, l'amplitude et l'argument du terme le plus important des séries S_0, S_1, S_2 pour les perturbations d'ordre 1, 2 et 3 des masses dues aux planètes intérieures issues de VSOP82 et d'ordre 4 et plus obtenues par itération. On voit que ces dernières ne sont pas négligeables ; on trouve, en particulier, un terme en t^2 atteignant $0,30''$ pour $t = 1000$ ans, soit $10,8''$ pour t=6000 ans, ce qui est nettement supérieur à la précision de notre théorie comme nous le verrons plus loin.

Tableau 1. – Développements en puissance du temps des perturbations apportées par les planètes intérieures sur la longitude moyenne de Saturne dans notre solution : argument et amplitude du terme donnant la plus grosse contribution au bout de 1000 ans. L'unité est la seconde de degré.

	Ordres 1+2+3 (VSOP82, Bretagnon, 1982)	Ordres ≥ 4 (obtenus par itération)
S_0	$3,80\,(16\,882\mu \Leftrightarrow \bar\lambda_3 - \bar\lambda_6)$	$0,13\,(19\mu \Leftrightarrow 2\bar\lambda_5 - 5\bar\lambda_6)$
S_1	$0,56\,(27\,814\mu \Leftrightarrow \bar\lambda_2 - \bar\lambda_6)$	$0,34\,(19\mu \Leftrightarrow 2\bar\lambda_5 - 5\bar\lambda_6)$
S_2	$0,47\,(0\mu)$	$-0,30\,(0\mu)$

4. Construction d'une théorie avec des valeurs récentes des masses

4.1 Masses des grosses planètes

Nous avons construit simultanément deux théories des grosses planètes : une théorie avec les masses UAI 1976 et une théorie avec les masses IERS 1992 que nous avons ajustées, aux intégrations numériques du JPL, DE200 (Standish, 1982) et DE245 (Standish, 1994), respectivement.

Le tableau 2 donne le rapport de la masse du Soleil aux masses des grosses planètes dans ces différents systèmes. On constate que les masses IERS 1992 et DE245 sont identiques, à un petit écart près sur la masse de Saturne.

Tableau 2. – Rapport de la masse du Soleil aux masses des grosses planètes dans différents systèmes.

	UAI 1976	DE200	IERS 1992	DE245
Jupiter	1047,355	1047,350	1047,3486	1047,3486
Saturne	3498,5	3498,0	3497,90	3497,898
Uranus	22 869	22 960	22 902, 94	22 902, 94
Neptune	19 314	19 314	19 412, 24	19 412, 24

4.2 Comparaison à DE245

Notons $\gamma_{245}, \gamma_{200}, \gamma_{vsop}$, les équinoxes de DE245, DE200 et l'équinoxe dynamique inertiel de VSOP82 et $\varepsilon_{245}, \varepsilon_{200}, \varepsilon_{dyn}$ les obliquités de DE245, DE200, et l'obliquité de l'écliptique dynamique VSOP82 sur le plan de référence de DE245. Les comparaisons entre DE245, DE200 et VSOP82, effectuées en collaboration avec P. Bretagnon et G. Francou donnent les relations suivantes permettant de définir le repère :

$$\begin{aligned}
\gamma_{245}\gamma_{200} &= 0'', 0191 \\
\gamma_{245}\gamma_{vsop} &= -0'', 0739 \\
\varepsilon_{245} - \varepsilon_{200} &= -0'', 0030 \\
\varepsilon_{dyn} &= 23°26'21'', 4061
\end{aligned}$$

Le tableau 3 donne les plus gros écarts obtenus, après ajustement, entre notre théorie construite avec les masses IERS 1992 et DE245 sur l'intervalle de temps 1891–2000 pour les coordonnées héliocentriques, longitude, latitude et rayon vecteur. L'unité est le millième de seconde de degré pour la longitude et la latitude et 10^{-8} ua pour le rayon vecteur. On constate que ces écarts sont petits, de l'ordre de quelques millièmes de seconde de degré pour la longitude héliocentrique, par exemple.

Tableau 3. – Plus gros écarts entre notre théorie et DE245 sur l'intervalle 1891–2000, pour les variables héliocentriques.

	Longitude $(0,001'')$	Latitude $(0,001'')$	Rayon vecteur $(10^{-8}$ua$)$
Jupiter	6	2	6
Saturne	8	4	20
Uranus	8	6	50
Neptune	4	2	60

Notons que les écarts entre les intégrations numériques DE200 et DE245 sont importants et vont, sur l'intervalle 1891–2000, de $0,12''$ pour la longitude héliocentrique de Jupiter jusqu'à $0,8''$ pour la longitude de Neptune. Il en résulte des différences importantes entre les théories ajustées à DE245 où à DE200, en particulier sur les moyens mouvements moyens des planètes comme le montre le tableau 4 qui donne les moyens mouvements obtenus dans nos deux théories, en radians/1000 ans.

Tableau 4. – Moyens mouvements moyens des grosses planètes dans la théorie ajustée à DE245 (masses IERS 1992) et dans la théorie ajustée à DE200 (masses UAI 1976). L'unité est le radian par millier d'années.

Théorie ajustée à	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
DE245	$529,690\,9728$	$213,299\,0824$	$74,781\,656$	$38,132\,905$
DE200	$529,690\,9666$	$213,299\,0885$	$74,781\,596$	$38,133\,037$
Écarts	$6,2\,10^{-6}$	$-6,2\,10^{-6}$	$6,0\,10^{-5}$	$-1,4\,10^{-4}$

4.4 Précision de la solution

Nous avons estimé la précision de notre solution en comparant à des intégrations numériques internes des huit planètes sur l'intervalle de temps $J2000-6000, J2000+6000$, notre théorie et les deux théories de référence VSOP87 et JASON84 (Simon et Bretagnon, 1984). La figure 1 illustre ces écarts pour les quatre longitudes moyennes. Ces écarts sont exprimés en secondes de degré et le temps est compté en années sur l'intervalle J2000-6000, J2000+6000. Les résultats sont comparables à ceux que nous avions obtenus pour le problème simplifié des perturbations mutuelles des quatre grosses planètes. Nos résidus ne dépassent pas $0,025''$ sur $J2000-1000, J2000+1000$ et $3,5''$ sur $J2000-6000, J2000+6000$. Par rapport aux meilleures théories analytiques actuelles, le gain en précision est, en moyenne, compris entre 5 et 10.

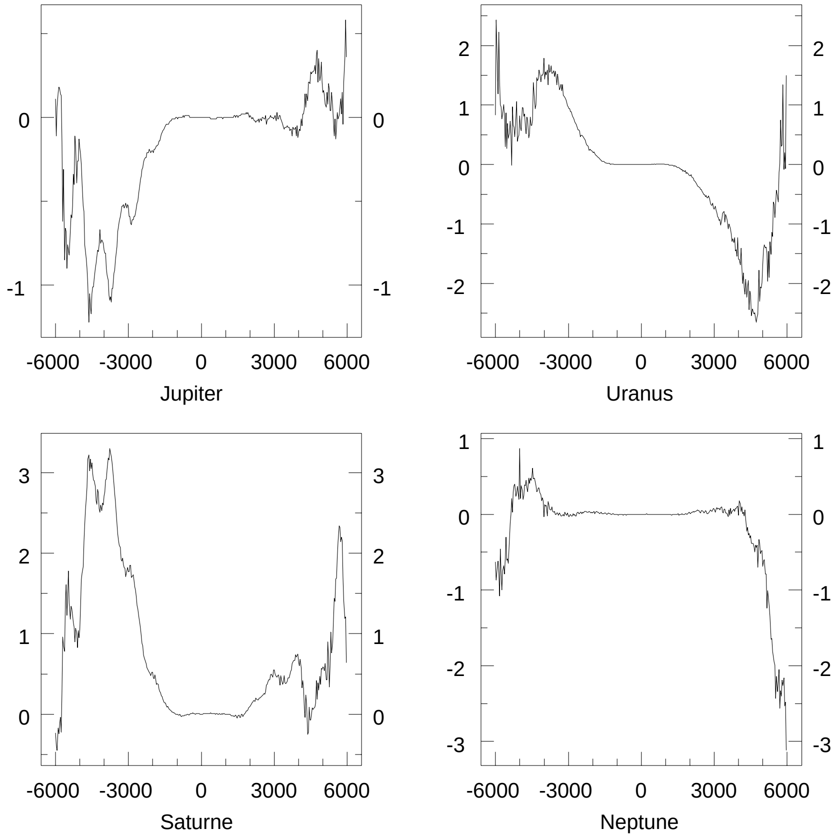

Figure 1.. – *Longitudes moyennes de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.* Comparaison de notre solution à une intégration numérique interne des huit planètes principales sur l'intervalle de temps $J2000 - 6000, J2000 + 6000$. 0 représente J2000. L'unité est la seconde de degré.

5. Conclusion

La construction de notre théorie est pratiquement achevée. Il reste à ajouter les perturbations par les gros astéroïdes et les perturbations relativistes. On disposera alors d'une théorie construite avec des valeurs modernes des masses, très voisine de DE245 et plus précise que les meilleures théories analytiques actuelles. On pourra aussi en extraire des solutions compactes de précision plus faible, à l'usage des historiens des sciences.

Bibliographie

Bretagnon, P. : 1982, A & A **114**, 278
Simon, J.L., Bretagnon, P. : 1984, A & A **138**, 169
Simon, J.L., Joutel, F. : 1988, A & A **205**, 328
Simon, J.L., Joutel, F., Bretagnon, P. : 1992, A & A **265** , 308
Standish, E.M. : 1982, A & A **114**, 297
Standish, E.M. : 1994, communication privée

Remerciements. Nous remercions E.M. Standish pour sa mise à notre disposition de DE245 et pour les renseignements qu'il nous a fournis sur son intégration numérique, P. Bretagnon et G. Francou pour leur aide dans l'étude du repère de DE245 et Ch. Ruatti pour sa collaboration.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES

P. Bretagnon

1. Introduction

Les solutions du mouvement des planètes construites au Bureau des longitudes VSOP82 (Bretagnon, 1982), TOP82 (Simon, 1983), JASON84 (Simon et Bretagnon, 1984), VSOP87 (Bretagnon et Francou, 1988) ont des précisions de l'ordre de 10^{-7} pour Jupiter et Saturne et de l'ordre de 10^{-8} pour Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune sur un intervalle de temps de 100 ans de part et d'autre de J2000.

Les progrès des techniques d'observations entraînent un besoin de solutions analytiques 10 à 100 fois plus précises. Un tel gain a été obtenu (Simon, Joutel et Bretagnon, 1992) pour les grosses planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune en élaborant une méthode représentant les solutions en fonction des multiples d'un seul argument.

On se propose, à partir des solutions actuelles, d'améliorer les théories, en particulier les théories des planètes inférieures, par une méthode itérative.

2. Précision des solutions TOP et VSOP

Ces solutions ont été obtenues par intégration des équations de Lagrange en prenant en compte toutes les perturbations des planètes entre elles jusqu'au troisième ordre des masses perturbatrices pour une fonction perturbatrice newtonienne :

$$R = GM' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}'}{r'^3}\right)$$

où $G = (0,017\,202\,098\,95)^2$ est la constante de la gravitation, M' et r' la masse et le rayon vecteur de la planète perturbatrice, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ les vecteurs de position des deux planètes, Δ leur distance mutuelle.

Les solutions ont été améliorées par des méthodes itératives pour les grosses planètes et sont équivalentes à des théories au sixième ordre des masses. De plus, il a été tenu compte de compléments relativistes, des perturbations dues à certains astéroïdes et à la Lune.

Compléments relativistes

Les compléments relativistes ont été appliqués dans le cadre du problème de Schwarzschild, c'est-à-dire en ne tenant compte que du rayon gravitationnel du Soleil et en négligeant les actions relativistes mutuelles directes des planètes entre elles. On trouve, outre l'avance bien connue des périhélies, des perturbations périodiques de l'ordre de $0''{,}01$ dans la longitude de Mercure.

Perturbations par les astéroïdes

On a calculé, au premier ordre et au deuxième ordre des masses, les perturbations sur toutes les planètes principales par les astéroïdes Cérès, Pallas, Vesta, Iris et Bamberga. Ces perturbations ont des effets importants surtout sur Mars et Jupiter. Elles atteignent $0''{,}02$ dans la longitude de Mars. Lors de la construction de ces perturbations, on rencontre des difficultés dues aux quasi-résonances, résonance 1/2 entre Mars et Vesta, résonance 2/5 entre Pallas et Jupiter par exemple. Il y a également une grande difficulté à construire les inverses des distances mutuelles en raison des paramètres orbitaux des astéroïdes. L'orbite de Pallas, par exemple, a pour excentricité $e = 0,234$ et pour inclinaison sur l'écliptique $i = 34^\circ{,}8$.

Perturbations par la Lune

Dans un premier temps, le troisième corps étudié du système solaire est le barycentre du système Terre-Lune considéré comme un point matériel dont la masse est la somme des masses de la Terre et de la Lune. Pour tenir compte de l'action de la Lune sur le mouvement du barycentre Terre-Lune, il faut ajouter la fonction perturbatrice :

$$R_B = G(M_S + M_T + M_L)\left[(1-\sigma)\frac{1}{r_T} + \frac{\sigma}{r_L} - \frac{1}{r_B}\right]$$

où M_S, M_T et M_L représentent les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune respectivement et $\sigma = M_L/(M_T + M_L)$. r_B, r_T et r_L sont les vecteurs héliocentriques du barycentre Terre-Lune, de la Terre et de la Lune respectivement.

On a ainsi tenu compte de l'influence de la Lune sur toutes les planètes jusqu'au deuxième ordre. La perturbation la plus importante est l'avance du périhélie du barycentre Terre-Lune qui atteint $65''{,}75$ par millier d'années juliennes. Les perturbations périodiques sont de faible amplitude : $0''{,}003$ (terme de période 15 jours), $0''{,}089$ (terme de période 6409 ans) dans la longitude du barycentre Terre-Lune.

La précision des solutions est donnée dans la Table 1 pour un intervalle de 1000 ans autour de J2000 et de 100 ans autour de J2000.

Table 1. Précision des solutions VSOP et TOP sur 1000 ans et 100 ans.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
1000 ans	$0''{,}02$	$0''{,}04$	$0''{,}10$	$0''{,}40$	$0''{,}24$	$0''{,}22$	$0''{,}04$	$0''{,}04$
100 ans	$0''{,}001$	$0''{,}006$	$0''{,}005$	$0''{,}010$	$0''{,}020$	$0''{,}070$	$0''{,}016$	$0''{,}010$

3. Équations du mouvement en coordonnées rectangulaires

A partir des solutions obtenues en variables elliptiques, on a exprimé le mouvement des planètes en coordonnées rectangulaires (Bretagnon et Francou, 1988). On constate que les solutions sont représentées, pour une même précision, par deux fois moins de termes. On se propose donc d'intégrer les équations du mouvement en variables rectangulaires sous la forme suivante (Brumberg, 1991) :

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_i = &- f(M_0 + M_i)\frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} + \sum_{j\neq i} fM_j\left(\frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{R}_j}{R_j^3}\right) \\
&+ (m_0A_{i0} + m_iA_{0i})\mathbf{R}_i + (m_0B_{i0} + m_iB_{0i})\dot{\mathbf{R}}_i \\
&+ \sum_{j\neq i} m_j\left[A_{ij}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) + A_{0j}\mathbf{R}_j + B_{ij}(\dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_j) + B_{0j}\dot{\mathbf{R}}_j\right]
\end{aligned} \tag{1}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A_{ij} = &\frac{\dot{\mathbf{x}}_i^2}{r_{ij}^3} - (\gamma + 1 + \alpha)\frac{\dot{\mathbf{r}}_{ij}^2}{r_{ij}^3} + \frac{3}{2r_{ij}^5}(\mathbf{r}_{ij}\dot{\mathbf{x}}_j)^2 + \frac{3\alpha}{r_{ij}^5}(\mathbf{r}_{ij}\dot{\mathbf{r}}_{ij})^2 \\
&+ f\left[(2\gamma + 2\beta + 1 - 2\alpha)M_i + (2\gamma + 2\beta - 2\alpha)M_j\right]\frac{1}{r_{ij}^4} \\
&+ \sum_{k\neq i,j} fM_k\Bigg[(2\gamma + 2\beta - \alpha)\frac{1}{r_{ij}^3 r_{ik}} + (2\beta - 1 - 2\alpha)\frac{1}{r_{ij}^3 r_{jk}} + \frac{\alpha}{r_{ij} r_{ik}^3} \\
&+ \frac{2(\gamma+1)}{r_{ij} r_{jk}^3} + (-2\gamma - \frac{3}{2} + \alpha)\frac{1}{r_{ik} r_{jk}^3} - \frac{\alpha}{r_{ik}^3 r_{jk}} \\
&+ (\frac{\alpha}{r_{ik}^3} - \frac{\alpha + 1/2}{r_{jk}^3} - \frac{3\alpha}{r_{ij}^2 r_{ik}} + \frac{3\alpha}{r_{ij}^2 r_{jk}})\frac{1}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{ik})\Bigg]
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
B_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3}[(2\gamma + 2 - 2\alpha)(\mathbf{r}_{ij}\dot{\mathbf{r}}_{ij}) + \mathbf{r}_{ij}\dot{\mathbf{x}}_j]. \tag{3}
$$

Dans le cadre de la relativité générale, $\gamma = \beta = 1$, les coordonnées harmoniques correspondent à $\alpha = 0$. $\mathbf{R}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ où $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x}_0$ représentent les vecteurs barycentriques de la planète i et du Soleil respectivement. $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. R_j est la distance du Soleil à la planète j et r_{ij} la distance entre les planètes i et j. Enfin $m_i = GM_i/c^2$ où M_i est la masse de la planète i et c la vitesse de la lumière.

La partie relativiste des équations (1) contient l'ensemble des termes proportionnels à c^{-2} et l'ensemble des termes proportionnels à $c^{-2}M$ où M est une masse planétaire.

L'introduction d'astéroïdes dans les équations (1) créera des difficultés comparables à celles rencontrées lors de l'intégration des équations du mouvement représentées en variables elliptiques.

Enfin, en variables rectangulaires, on n'intégrera non pas le mouvement du barycentre Terre-Lune mais la Terre et la Lune séparément avec leurs masses respectives. Pour cela, les seconds membres des équations (1) seront calculés à l'aide du vecteur héliocentrique de la Lune :

$$
\mathbf{R}_L = \mathbf{R}_T + \mathbf{TL}
$$

où le vecteur Terre-Lune **TL** est donné par ELP2000-82 (Chapront-Touzé et Chapront, 1983).

4. Résolution des équations

Les solutions actuelles des planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars ont été obtenues par un développement jusqu'au troisième ordre des masses perturbatrices. Il serait très complexe d'opérer de la même façon pour obtenir les perturbations du quatrième ordre. Il semble donc préférable d'intégrer les équations (1) en procédant par itérations successives. Pour cela, écrivons-les pour chaque planète sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + G(M_0 + M)\frac{x}{r^3} &= X \\
\ddot{y} + G(M_0 + M)\frac{y}{r^3} &= Y \\
\ddot{z} + G(M_0 + M)\frac{z}{r^3} &= Z
\end{aligned} \tag{4}
$$

X, Y, Z contenant la partie relativiste et la perturbation newtonienne.

Pour résoudre ce système, définissons les variables sans dimensions p complexe et w réelle telles que :

$$\begin{aligned} x + iy &= a(1-p)e^{i\lambda} \\ z &= aw \end{aligned} \tag{5}$$

où $\lambda = nt + \varepsilon$ et $n^2a^3 = G(M_0 + M)$. Par différentiation par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{p} + 2in\dot{p} - n^2p &= n^2\Big[-1 - \frac{1}{n^2a}(\ddot{x} + i\ddot{y})e^{-i\lambda}\Big] \\ \ddot{w} &= \frac{1}{a}\ddot{z} \end{aligned} \tag{6}$$

En utilisant (4), on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{p} + 2in\dot{p} - n^2p &= n^2\Big[-1 + \frac{a^3}{r^3}(1-p) - \frac{1}{n^2a}(X + iY)e^{-i\lambda}\Big] \\ \ddot{w} &= n^2\Big[-\frac{a^3}{r^3}w + \frac{1}{n^2a}Z\Big] \end{aligned} \tag{7}$$

Afin d'abaisser l'ordre en excentricité dans les seconds membres des équations, on ajoute la quantité $-\frac{1}{2}n^2p - \frac{3}{2}n^2\overline{p}$ dans les deux membres de la première des équations (7) et n^2w dans la deuxième, d'où :

$$\begin{aligned} \ddot{p} + 2in\dot{p} - \frac{3}{2}n^2(p + \overline{p}) &= n^2P \\ \ddot{w} + n^2w &= n^2W \end{aligned} \tag{8}$$

avec :

$$\begin{aligned} P &= -\frac{3}{2}(p + \overline{p}) + (\frac{a^3}{r^3} - 1)(1-p) - \frac{1}{n^2a}(X + iY)e^{-i\lambda} \\ W &= -(\frac{a^3}{r^3} - 1)w + \frac{1}{n^2a}Z \end{aligned}$$

La solution générale de (8) est :

$$\begin{aligned} p =& Ae^{i\lambda} - 3\overline{A}e^{-i\lambda} + inB + 3inCt - 2C \\ &+ \frac{3}{4}ine^{-i\lambda}\int(3P - \overline{P})e^{i\lambda}dt + \frac{1}{4}ine^{i\lambda}\int(3\overline{P} - P)e^{-i\lambda}dt \\ &- 2in\int Pdt - \frac{3}{2}n^2\int\int(P - \overline{P})dtdt \\ w =& De^{i\lambda} + \overline{D}e^{-i\lambda} + \frac{1}{2}ine^{-i\lambda}\int We^{i\lambda}dt - \frac{1}{2}ine^{i\lambda}\int We^{-i\lambda}dt \end{aligned} \tag{9}$$

où A et D sont des constantes d'intégration complexes, B et C des constantes d'intégration réelles.

5. Conclusion

Le but de ce travail est d'obtenir une solution des équations (8) de précision 10^{-10} pour les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars. On utilisera les déterminations récentes des masses planétaires, par exemple celles données par l'IERS (McCarthy, 1992). En ce qui concerne les échelles de temps, il paraît souhaitable de disposer de solutions barycentriques exprimées à la fois en temps coordonnée barycentrique (TCG) et dans une échelle de temps fonction linéaire de TCG et voisine de TDB.

Remerciements

Je remercie V. A. Brumberg et J.-L. Simon pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur le choix des systèmes d'équations, sur les précisions des solutions actuelles et sur les objectifs à atteindre.

Références

Bretagnon, P., 1982, *Astron. Astrophys.* **114**, 278

Bretagnon, P., Francou, G., 1988, *Astron. Astrophys.* **202**, 309

Brumberg, V. A., 1991, Essential Relativistic Celestial Mechanics, Hilger, Bristol

Chapront-Touzé, M., Chapront, J., 1983, *Astron. Astrophys.* **124**, 50

McCarthy, D. D., 1992, IERS Standards, IERS Technical Note 13, Observatoire de Paris

Simon, J.-L., 1983, *Astron. Astrophys.* **120**, 197

Simon, J.-L., Bretagnon, P., 1984, *Astron. Astrophys.* **138**, 169

Simon, J.-L., Joutel, F., Bretagnon, P., 1992, *Astron. Astrophys.* **265**, 308

MODÉLISATION DU MOUVEMENT D'HYPÉRION

L. Duriez & A. Vienne, Université de Lille

1. Introduction

Dans ce qui suit, on adopte les notations classiques (a, n, e, i, Ω, ϖ, λ) pour représenter les éléments osculateurs des satellites de Saturne, rapportés au centre de Saturne, à son plan équatorial et au point d'intersection de ce plan avec l'ecliptique moyen pour J2000.0 ; on utilise aussi N, moyen mouvement moyen, et les variables $p = n/N - 1$, $q = \lambda - Nt$, $z = e \exp\sqrt{-1}\,\varpi$ et $\zeta = \sin(i/2) \exp\sqrt{-1}\,\Omega$. Ce sont ces mêmes variables et ce même repère qui sont utilisés dans TASS (**T***héorie* **A***nalytique des* **S***atellites de* **S***aturne* développée à Lille depuis 1989).

Parmi ces satellites, Hypérion est celui dont le mouvement orbital se trouve en résonance 3 : 4 avec celui de Titan : La combinaison des vitesses angulaires moyennes $3N_T - 4N_H + < \dot{\varpi}_H >$ est en effet égale à zéro, entraînant une grande libration de l'argument $\theta = 3\lambda_T - 4\lambda_H + \varpi_H$:

$$\theta = 3(\lambda_T - \lambda_H) - M_H \approx 180° - 36° \sin\tau - 13° \sin\varphi + \cdots$$

Cette libration est associée à une assez forte excentricité pour Hypérion :

$$e_H = 0.104 + 0.024 \cos\varphi + \cdots$$

L'argument τ représente la libration, et φ la partie linéaire en t dans la combinaison $\varpi_T - \varpi_H$. Leurs périodes respectives valent environ 640 jours et 6830 jours, tandis que l'argument synodique, de fréquence $N_T - N_H$, a une période de 63 jours.

La forte excentricité d'Hypérion, combinée à la valeur élevée du rapport α des grands axes de Titan et d'Hypérion ($\alpha = 0.85$), conduit à des orbites presque sécantes ; heureusement, la libration de θ autour de 180° montre que les conjonctions de ces deux satellites se produisent dans le voisinage de $M_H = 180°$, c'est-à-dire vers l'apocentre de l'orbite d'Hypérion, là où les orbites sont les plus éloignées ; la résonance permet donc d'éviter les rapprochements trop serrés entre ces deux satellites et a un effet stabilisateur sur le mouvement d'Hypérion. En contre partie, le développement classique de la fonction perturbatrice d'Hypérion par Titan (exprimé en coefficients de Laplace et en série de Fourier des longitudes moyennes, et sans tenir compte de la libration) ne converge pas suffisamment vite pour être exploitable. Il faut développer cette fonction perturbatrice directement en fonction de θ ou de τ, comme l'ont fait Woltjer (1928), ou Message (1989). Les théories actuelles du mouvement d'Hypérion (Dourneau, 1987, et Taylor, 1992) sont des extensions des travaux de Woltjer qui utilisent ces types de développements pour représenter les variations à longues périodes des éléments d'Hypérion ; cependant, nous avons montré (Vienne & Duriez, 1991) qu'une bonne théorie du mouvement d'Hypérion doit aussi représenter convenablement les variations à courtes périodes (qui sont loin d'être négligeables), et que par les méthodes analytiques, il faudrait les calculer au moins à l'ordre 2 des masses. Les théories actuelles sont encore incomplètes de ce point de vue, et cela se traduit par des écarts-types de $0'', 28$ dans la comparaison entre la théorie de Taylor et les observations. En fait, nous allons voir qu'il manque dans cette théorie d'importants termes dépendant des variables d'inclinaison dans la partie à longues périodes, ainsi que de très nombreux termes périodiques, qui peuvent contribuer à plusieurs dixièmes de secondes.

Le but du présent travail est d'obtenir pour Hypérion, une représentation de son mouvement avec une précision comparable à celle atteinte dans TASS pour les autres satellites : Nous visons une précision de l'ordre de quelques kilomètres pour pouvoir représenter les futures observations des satellites de Saturne lors de la mission CASSINI.

L'approche que nous avons adoptée ici est purement numérique : elle est fondée sur l'intégration numérique des équations rigoureuses représentant l'interaction "Titan-Hypérion", complétées par des représentations analytiques des perturbations séculaires des éléments d'orbite dues aux autres satellites, au Soleil et aux coefficients d'aplatissement de Saturne. La durée de l'intégration numérique est suffisamment longue (environ 1500 ans) pour qu'une analyse en fréquences permette de trouver les fréquences propres et les phases de 7 arguments fondamentaux du système dynamique :

$$\begin{cases} \psi = (N_T - N_H)\,t + \psi_0 & \text{période} \approx & 63 \text{ jours} & \\ \tau = \dot{\tau}\,t + \tau_0 & \text{"} & 640 \text{ "} & \\ \varpi^* =< \dot{\varpi}_H > t + \varpi^*_{0H} & \text{"} & -7015 \text{ "} & \\ \varpi^*_T =< \dot{\varpi}_T > t + \varpi^*_{0T} & \text{"} & 254934 \text{ "} & (698\ ans) \\ \Omega^* =< \dot{\Omega}_H > t + \Omega^*_{0H} & \text{"} & -55103 \text{ "} & (150\ ans) \\ \Omega^*_T =< \dot{\Omega}_T > t + \Omega^*_{0T} & \text{"} & -255035 \text{ "} & \\ \Omega_0 = \quad 0 \quad + \Omega_{00} & \text{"} & \text{infinie} & \end{cases}$$

Le dernier argument est associé au plan invariable du système de satellites de Saturne, incliné de $0^\circ\!, 32$ sur le plan équatorial de la planète. Les périodes voisines de 700 ans sont associées au mouvement de Titan. L'analyse en fréquences permet alors de synthétiser les éléments d'orbite sous forme de séries de termes périodiques dont les arguments sont ensuite identifiés comme étant combinaisons linéaires entières des 7 arguments fondamentaux. L'analyse est poussée de façon à atteindre tous les termes à longue période supérieurs à 1 km, plus ceux à courte période dépassant 5 km. Néammoins, on trouve que la lenteur de la convergence de ces séries à courtes périodes fait que l'écart maximum sur 100 ans entre les positions calculées par l'intégration numérique et celles issues de sa représentation synthétique, atteint encore près de 300 km (soit moins de $0'', 05$ vu de la Terre).

2. Le modèle et son intégration numérique

Pour pouvoir intégrer numériquement le système dynamique réduit à Saturne-Titan-Hypérion et pour retouver néanmoins les bonnes valeurs des fréquences fondamentales (notamment celles qui représentent les mouvements à longue période de Titan), nous utilisons les équations de Lagrange mises sous la forme fermée donnée par Chapront *et al.* (1975) et relatives aux variations de p, q, z et ζ. En effet il est alors très facile d'ajouter à ces équations l'expression analytique des perturbations séculaires de q, z et ζ dues aux autres satellites, au Soleil et aux coefficients d'aplatissement J_2, J_4 et J_6. Ces expressions analytiques sont obtenues au degré 4 en excentricités et inclinaisons par la méthode développée pour les planètes dans Duriez (1977) et à l'ordre 2 des masses ou de J_2 et J_4 par la méthode développée aussi pour les planètes par Laskar (1985). Dans ces expressions analytiques, on ne conserve que les termes dépendant explicitement des variables z et ζ de Titan et d'Hypérion. Les coefficients de ces termes sont calculés numériquement pour les valeurs des moyens mouvements moyens (ou des demi-grand axes), des masses, de J_2, J_4 et J_6 obtenues dans la version TASS1.6 après ajustement aux observations (Vienne & Duriez, 1995).

Les conditions initiales de Titan sont celles données par TASS1.6, et celles d'Hypérion ont été calculées dans le repère J2000.0 à partir des positions et vitesses données par Harper *et al.* (1989) dans le repère B1950 pour la date julienne 2418800.5 (cette date correspond au milieu de l'intervalle dans lequel Harper *et al.* ont ajusté une intégration numérique de Titan, Hypérion et Japet aux observations).

Nous avons utilisé une méthode d'Adams d'ordre 10 avec prédicteur-correcteur pour intégrer ces équations sur environ 1500 ans avec un pas égal à $0, 1$ jour et une précision de 10^{-10}. Cette valeur du pas permet, avec cette précision, de ne faire jouer le correcteur qu'une seule fois par pas. La durée de 1500 ans est choisie pour permettre une analyse en fréquences des termes de plus basse fréquence présents dans la dynamique du problème Titan-Hypérion (périodes de 700 ans, voir plus haut). Par ailleurs, des analyses préalables (Duriez, 1992) ont montré que les termes à courte période d'amplitude supérieure à 2 kilomètres ont tous une période plus longue que 3 jours (environ 21ψ). Pour pouvoir analyser en fréquences des termes de période supérieure à 3 jours, il suffit d'échantillonner les séries temporelles fournies par l'intégration numérique avec un pas de sortie inférieur à 1, 5 jour. Nous avons en fait choisi un pas de sortie de 1, 4 jour, suite aux contraintes de filtrage liées à l'exploitation des séries temporelles par l'analyse en fréquences.

3. Filtrage numérique des séries temporelles

En théorie du signal, une série temporelle de $2n+1$ valeurs $\{S(t_i)\}$ représentant une fonction $S(t)$ quasi-périodique et échantillonnée avec un pas Δt sur la durée $D = 2n\Delta t$ (on a : $t_i = t_0 + i \times \Delta t$ avec $0 \le i \le 2n$), peut être analysée en fréquences avec un pouvoir de résolution égal à $\Delta\omega = 2\pi/(n\,\Delta t) = \pi/D$; on obtient alors une représentation de $S(t)$ sous la forme :

$$\tilde{S}(t) = \sum_j S_j \, \exp \sqrt{-1}\,\omega_j t$$

où l'on a $|\omega_j| \le \frac{1}{2}\omega_s = \pi/\Delta t = \frac{1}{2}n\Delta\omega$. Pour représenter une série temporelle dépendant de termes dont les périodes sont comprises entre $T_{\min}$ et $T_{\max}$, il faut donc avoir :

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{T_{\max}} \ge \Delta\omega = \dfrac{2\pi}{D/2} & \Longrightarrow \quad D \ge 2T_{\max} \\ \dfrac{2\pi}{T_{\min}} \le \frac{1}{2}\omega_s = \dfrac{\pi}{\Delta t} & \Longrightarrow \quad \Delta t \le \dfrac{T_{\min}}{2} \end{cases}$$

Avec $T_{\min} = 3$ jours et $T_{\max} = 256\,000$ jours (700 ans), on obtient : $D \ge 1400$ ans et $\Delta t \le 1,5$ jours, et donc aussi : $2n \approx 341\,000$; or, une telle valeur est largement trop élevée pour une bonne utilisation des méthodes d'analyse en fréquences.

Pour résoudre ce problème, nous avons procédé en deux temps : On applique d'abord un filtre numérique passe-bas sur les séries temporelles données par l'intégration numérique de façon à ce que $T_{\min}$ soit égal à 45 jours au lieu de 3 jours : avec une durée de 1507, 2 ans et un échantillonnage $\delta t = 22,4$ jours, on obtient maintenant $2n = 24576$. La méthode de filtrage utilisée est analogue à celle mise en œuvre par Carpino *et al.* (1987) dans leur projet LONGSTOP d'intégration numérique des grosses planètes sur 10 millions d'années. L'application du filtre revient à transformer la série temporelle initiale $S(t_i)$ en une autre série temporelle $S_1(t_k)$ par l'intermédiaire de $2p+1$ coefficients $\{f_j\}_{j=0..2p}$:

$$S_1(t + p\Delta t) = \sum_{j=0}^{2p} f_j \, S(t + j\Delta t) \qquad \text{avec} \qquad t_k = t + p\Delta t = t'_0 + k\delta t$$

Les coefficients du filtre conservent les phases (car leur nombre est impair), et sont calculés pour laisser intacts (à $\pm\rho$ près [ripple]) les termes de fréquence plus basse que $\omega_0 = 2\pi/T_0$, et pour annuler (à $\pm\alpha$ près [atténuation]) les termes de fréquence plus élevée que $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Le filtre n'est pas défini entre ω_0 et ω_1 (algorithme FIR décrit dans Rabiner & Gold, 1975).

La période $T_0 = T_{\min} = 45$ jours est choisie de façon à ce que les séries filtrées ne comportent plus que le terme synodique, les termes de libration et les termes à longues périodes, c'est-à-dire tous les arguments de la forme :

$$j_1\psi + j_2\tau + j_3\varpi^* + j_4\varpi^*_T + j_5\Omega^* + j_6\Omega^*_T + j_7\Omega_0 \tag{1}$$

avec : $|j_1| \le 1$, $|j_2| \le 5$, $|j_3| \le 3$, $|j_4| \le 2$, $|j_5| \le 3$, $|j_6| \le 2$ et $|j_7| \le 2$ (ces bornes correspondent en fait aux termes supérieurs à 1 km trouvés dans les séries d'Hypérion).

Par ailleurs, nous avons constaté que dans le problème Titan-Hypérion, il n'existe aucun terme significatif (au niveau kilométrique) de période comprise entre 38 jours et 45 jours ; nous avons donc ajusté le filtre pour supprimer complètement les termes de période inférieure à $T_1 = 38$ jours. Ainsi, l'intervalle où le filtre n'est pas défini agit sur des termes d'amplitude négligeable.

Dans ces conditions, une série $S(t_i)$ est filtrée sur 1507, 2 ans avec un pas de sortie de 22, 4 jours pour donner la série $S_1(t_k)$ dont on fait l'analyse pour obtenir sa représentation $\tilde{S}_1(t)$ sous forme de sommes de termes à longues périodes (supérieures à 45 jours). Dès lors, la série : $S(t_i) - \tilde{S}_1(t_i)$ que l'on peut calculer, représente exactement les termes à courtes périodes (inférieures à 38 jours). Avec un pas de $1,4$ jour, l'analyse en fréquences de $S(t_i) - \tilde{S}_1(t_i)$ permet de déterminer tous les termes de période comprise entre $2,8$ et 38 jours ; si l'on conserve le même nombre de points ($2n = 24576$), la durée de cette série est voisine du siècle ($2n \times 1,4 = 34\,406,4$ jours), mais le pouvoir de résolution en est réduit : on ne peut plus séparer les termes dont les fréquences dépendent des variables d'inclinaison ; ceci n'est pas catastrophique car, dans le problème Titan-Hypérion, il se trouve que ces termes n'arrivent dans la partie à courtes périodes qu'au niveau de quelques kilomètres.

Pour réaliser un tel filtrage avec un nombre de coefficients $2p$ raisonnable (et avec $\rho = 10^{-6}$, $\alpha = 10^{-7}$, $\Delta t = 1,4$ j, $\delta t = 22,4$ j, $\omega_0 = 2\pi/45$ j^{-1} et $\omega_0 = 2\pi/38$ j^{-1}), on a dû adopter un filtre à deux étages :

$$
1^{\text{ier}}\text{ filtre : }\left\{\begin{array}{lcl} \Delta t & = & 1,4\,j \\ T_0 & = & 45\,j \\ T_1 & = & 15\,j \\ \delta t & = & 11,2\,j \\ 2p & = & 132 \end{array}\right. \qquad 2^{\text{ème}}\text{ filtre : }\left\{\begin{array}{lcl} \Delta t & = & 11,2\,j \\ T_0 & = & 45\,j \\ T_1 & = & 38\,j \\ \delta t & = & 22,4\,j \\ 2p & = & 178 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} \rho & = & 10^{-6} \\ \\ \alpha & = & 10^{-7} \end{array}
$$

Pour limiter la taille des fichiers de sortie, ces 2 filtres sont appliqués au cours de l'intégration numérique sur les séries temporelles générées : tous les $11,2$ jours, on applique le 1^{ier} filtre sur les séries échantillonnées au pas de $1,4$ jour (dès que l'on dispose de 133 points écartés de $1,4$ jour). Ensuite, tous les $22,4$ jours, on applique le $2^{\text{ème}}$ filtre sur les séries filtrées une fois au pas de $11,2$ jours (dès que l'on dispose de 179 points écartés de $11,2$ jours) ; ce sont ces séries filtrées $S_1(t_k)$ qui sont sauvegardées sur disque en vue de leur analyse ultérieure. Dans le même temps, on sauvegarde aussi dans un autre fichier les séries initiales non filtrées $S(t_i)$ échantillonnées au pas de $1,4$ jour et sur une durée de 1 siècle.

4. Analyse et synthèse d'une représentation

On a utilisé la méthode d'analyse en fréquences décrite dans Laskar *et al.* (1992) : on détermine précisément la fréquence correspondant au terme d'amplitude maximum ; ce terme [fréquence, amplitude et phase] est ensuite retranché de la série initiale ; le résultat peut de nouveau être analysé en fréquences pour donner le terme suivant de la représentation, ainsi ordonnée par amplitudes décroissantes ; on réitère ce processus jusqu'au niveau de troncature souhaité. Cette méthode a été complétée par la possibilité de faire des ajustements intermédiaires par moindres carrés lorsque l'analyse conduit à une nouvelle fréquence trop proche de l'une des fréquences déjà déterminée (écart inférieur au pouvoir de résolution, limité comme on l'a vu par la durée $2n\Delta t$ de la série analysée).

L'analyse en fréquences des séries filtrées $\{S_1(t_k)\}$ pour $k = 0..2n$ permet de les représenter sans problème jusqu'au niveau du kilomètre, sous la forme de termes à longues périodes :

$$\tilde{S}_1(t) = \sum_j S_{1j}\ \exp\sqrt{-1}\,\omega_j t$$

avec $|2\pi/\omega_j| \geq 45$ jours. Ces séries représentent les variations à longue période des variables p, q, z et ζ de Titan et d'Hypérion (avant de faire l'analyse en fréquences, on élimine par moindres carrés une éventuelle pente résiduelle dans la variable q). Il est aisé d'y reconnaître les termes associés aux 7 arguments fondamentaux cités plus haut, avec leur fréquence et leur phase. Il n'y a pas non plus de problème pour identifier chaque ω_j sous forme d'une certaine combinaison des fréquences fondamentales et on vérifie que la phase de chaque terme correspond à la même combinaison des phases fondamentales ; les arguments trouvés sont de la forme donnée en (1). L'identification des combinaisons de fréquences est réalisée en utilisant les règles de d'Alembert que doivent suivre les développements des éléments d'orbite : développements pairs en inclinaison pour les variables p, q et z, impliquant dans (1) : $j_5 + j_6 + j_7 =$ entier pair, caractéristique de monôme nulle dans les variables p et q, et égale à 1 dans z et ζ, impliquant dans (1) : $j_3 + j_4 + j_5 + j_6 + j_7$ égal à cette caractéristique.

Après avoir analysé et synthétisé les séries $\tilde{S}_1(t)$ représentant les variations à longues périodes des variables p, q, z et ζ, on calcule les séries temporelles $S(t_i) - \tilde{S}_1(t_i)$ avec $\Delta t = 1,4$ jour, sur la durée égale à $2n\Delta t$ (voisine du siècle) ; leur analyse en fréquences jusqu'au niveau d'amplitude de 5 km ne pose pas de problème ; on identifie les fréquences obtenues sous forme de combinaisons entières :

$$j_1\psi + j_2\tau + j_3\varpi^* + j_4\varpi_T^*$$

avec : $2 \leq |j_1| \leq 21$, $|j_2| \leq 3$, $|j_3| \leq 2$ et $|j_4| \leq 1$ (les fréquences associées aux inclinaisons correspondent à des périodes trop longues pour pouvoir être séparées sur un siècle).

Les représentations obtenues sont trop volumineuses pour être présentées ici ; on donne ci-après les plus gros termes (supérieurs à 350 km) trouvés dans la longitude moyenne d'Hypérion (variable q) ; ils sont exprimés en kilomètres et les termes accompagnés d'une astérisque sont absents de la théorie actuelle de Taylor (on note leur dépendance vis-à-vis des variables d'inclinaison) :

$243\,592,1$	sin	τ	période :	$640,5395\ j$	
$6\,181,2$	sin	$\tau + \varpi^* - \varpi_T^*$	"	$706,8542\ j$	
$-5\,616,8$	sin	$\tau - \varpi^* + \varpi_T^*$	"	$585,6004\ j$	
$3\,681,5$	sin	2ψ	"	$31,8185\ j$	
$2\,826,9$	sin	ψ	"	$63,6371\ j$	
$-2\,381,3$	sin	$\psi - \tau$	"	$70,6568\ j$	
$2\,216,3$	sin	$-\varpi^* + \varpi_T^*$	"	$6827,5603\ j$	
$1\,747,5$	sin	3ψ	"	$21,2123\ j$	
$1\,731,0$	sin	$\psi + \tau$	"	$57,8862\ j$	
$1\,051,3$	sin	4ψ	"	$15,9093\ j$	
$632,5$	sin	5ψ	"	$12,7274\ j$	
$-612,4$	sin	$-\Omega^* + \Omega_0$	"	$255035,3728\ j$	$(*)$
$-496,1$	sin	3τ	"	$213,5131\ j$	
$-491,9$	sin	$\tau + \Omega_T^* - \Omega_0$	"	$648,0727\ j$	$(*)$
$-491,5$	sin	$\psi - 2\tau$	"	$79,4172\ j$	
$-485,5$	sin	$\tau - \Omega_T^* + \Omega_0$	"	$633,1793\ j$	$(*)$
$-440,6$	sin	$-\Omega_T^* + \Omega_0$	"	$55103,5179\ j$	$(*)$

$425,8$	sin	6ψ	période :	$10,6061\ j$	
$375,1$	sin	$2\psi - \tau$	"	$33,4817\ j$	
$358,2$	sin	$\tau + \Omega_T^* - \Omega^*$	"	$646,4300\ j$	$(*)$
$-355,5$	sin	$\tau - \Omega_T^* + \Omega^*$	"	$634,7552\ j$	$(*)$

On donne ci-dessous le nombre de termes trouvés dans chaque élément d'Hypérion, ainsi que l'écart-type et l'écart maximun obtenus entre l'intégration numérique et sa représentation issue de l'analyse en fréquences :

- Pour la solution à longues périodes $\tilde{S}_1(t)$, sur 1507 ans, $\Delta t = 22,4$ jours :

élément	nb termes > 1 km	Ecart-type (km)	Ecart maxi (km)
p	39	2,24	10,2
q	112	4,09	17,8
z	85	3,08	17,4
ζ	47	2,73	11,7

- Pour la solution à courtes périodes $S(t) - \tilde{S}_1(t)$, sur 93 ans, $\Delta t = 1,4$ jour :

élément	nb termes > 5 km	Ecart-type (km)	Ecart maxi (km)
p	68	19,26	159,1
q	103	22,10	201,9
z	99	23,14	185,8
ζ	2	9,62	57,7

Lorsque l'on compare les positions d'Hypérion calculées à partir des éléments issus directement de l'intégration numérique, ou à partir de leur représentation, on obtient un écart-type de 48,9 km et un écart maximum de 283,9 km (sur 93 ans avec $\Delta t = 1,4$ jour).

5. Conclusion

Les écarts maximum obtenus, malgré une troncature à 5 km, montrent que les séries à courtes périodes convergent assez mal (près de la moitié des termes sont compris entre 5 et 15 km). Cependant, ces écarts laissent penser que cette représentation devrait suffire dans un premier temps pour un ajustement sur les observations d'Hypérion faites depuis la Terre. Dans ce but, on a réalisé des intégrations numériques analogues en variant légèrement chaque condition initiale ou la masse de Titan, puis en analysant et en synthétisant les représentations correspondant à chaque variarion ; on en a tiré des dérivées partielles numériques des fréquences et des phases des arguments fondamentaux par rapport à chaque condition initiale, ainsi que les dérivées partielles de l'amplitude de chaque terme. L'ajustement aux observations est en cours de réalisation.

6. Bibliographie

Chapront J., Bretagnon P., Mehl M. : 1975, *Celes. Mech.* **11**, 379–399

Carpino M., Milani A., Nobili A.L. :1987, *Astron. Astrophys.* **181**, 182–194

Dourneau G. : 1987, 'Observations et étude du mouvement des huit premiers satellites de Saturne', Thèse, Bordeaux.

Duriez L. : 1977, *Astron. Astrophys.* **54**, 93–112

Duriez L. : 1992, in 'Chaos, Resonance and Collective Dynamical Phenomena in the solar system' Ferraz-Mello (ed.), Kluwer Ac. Press, 209–214

Laskar J. : 1985, *Astron. Astrophys.* **144**, 133–146

Laskar J., Froeschlé C., Celetti A. : 1992, *Physica D*,**56**,253–269

Message J.P. : 1989, *Celes. Mech.* **45**, 45–53

Rabiner L.R., Gold B. : 1975, 'Theory and application of digital signal processing, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., USA

Harper D., Taylor D.B., Sinclair A.T. : 1989, *Astron. Astrophys.* **221**, 359–363

Taylor D.B. : 1992, *Astron. Astrophys.* **265**, 825–832

Vienne A., Duriez L. : 1991, *Astron. Astrophys.* **246**, 619–633

Vienne A., Duriez L. : 1995, to appear in *Astron. Astrophys.*

Woltjer J. : 1928, *Ann. Sterrewacht Leiden*, XVI, 3

ÉPHÉMÉRIDES DES ASTÉROÏDES POUR DENIS

(DEep Near Infrared Survey of the southern sky)

Annick Bec-Borsenberger

Résumé : Denis, ou "le deux microns" c'est-à-dire le survey du ciel austral dans le proche infrarouge, est un programme européen dont le coordinateur est l'Observatoire de Paris. Ce programme concerne environ 20 instituts ou laboratoires situés dans 8 pays différents. Son objectif est la couverture de la totalité du ciel austral **simultanément** dans les trois bandes I ($0.80 \times 10^{-6}\mu$m), J($1.25 \times 10^{-6}\mu$m) et K′($2.1 \times 10^{-6}\mu$m).

Introduction

Durant ces vingt dernières années, les observations dans l'infrarouge se sont multipliées grâce principalement au développement de récepteurs à deux dimensions comparables aux CCD ; cependant de larges bandes de l'infrarouge ont encore été peu explorées ; ainsi, la mission IRAS (*Infra-Red Astronomical Satellite*), survey de tout le ciel, ne concernait que le domaine situé entre 12 et 100 μm. Seules quelques zones situées entre le visible et 12 μm ont été observées, notamment au cours du *Two Micron Sky Survey* (table 1).

Le programme DENIS a pour complément le projet américain *2MASS* qui doit assurer la couverture du ciel boréal dans les 3 bandes I, J et K′.

Caractéristiques

Les observations seront effectuées sur le télescope de 1m de l'ESO, à la Silla (Chili), en utilisant une

Table 1. Insertion de DENIS dans les SURVEYS IR

	TMSS	IRAS	DENIS
Achèvement	1969	1985	1998 (?)
Longueur d'onde (μm)	0.9, 2.2	12, 25, 60, 100	0.8, 1.25, 2.2
Magnitude limite	3.1	5.2	18, 16, 14.5
Nb de sources	5 600	16 100	10^8
% du ciel couvert	77	96	100 (Hém. Sud)

caméra à 3 canaux équipée pour les voies J et K′ du proche infrarouge de 2 NICMOS3 de 256×256 pixels et pour la voie rouge, I, d'un CCD de $1\,024 \times 1\,024$ pixels. Avec ces récepteurs, les magnitudes limites que l'on pourra atteindre pour les sources sont 18 en I ; 16 en J et 14 en K′.

Le début du survey proprement dit est prévu pour le mois de janvier 1995 ; actuellement, la chaîne d'acquisition des données est en test pour les voies J et K′, la voie I devant être mise en service courant décembre. Les observations s'étendront sur environ 3,5 ans, ce qui correspond à un temps d'occupation du télescope de 2/3 et à un balayage de la totalité du ciel austral. Enfin, les données collectées sous forme d'images de $12' \times 12'$ seront stockées dans une banque de données informatiques.

Calcul des éphémérides des astéroïdes

Le survey du ciel austral implique que des objets du système solaire - en particulier des astéroïdes - vont se trouver parmi les objets détectés. Il s'agit de les identifier, au moins ceux pour lesquels les éléments orbitaux sont connus. Nous devons donc déterminer pour chaque nuit d'observation quels sont les astéroïdes répertoriés susceptibles de se trouver dans la partie du ciel observée cette nuit-là et de fournir alors pour ces astéroïdes leurs positions précises et leurs magnitudes estimées dans les couleurs de DENIS. Dans ce but, j'ai calculé, pour environ 5 500 astéroïdes et pour la période du survey, l'ascension droite, la déclinaison et la distance à la Terre ainsi que les magnitudes dans les bandes V, I, J et K′.

Ascension droite, déclinaison, distance à la Terre et magnitude V

Le calcul des coordonnées équatoriales astrométriques a été effectué par la méthode d'intégration numérique de Bulirsh et Stoer (1966) en calculant les perturbations par les planètes à l'aide des éphémérides DE200 (Standish, 1990), à partir des éléments orbitaux fournis par l'Institut d'Astronomie Théorique de Saint-Pétersbourg (V. Shor, 1993). Quant à la magnitude visuelle, V, elle a été obtenue en utilisant le formulaire retenu par l'UAI (*formulaire établi à partir de considérations de transfert radiatif*) à l'aide des paramètres H et G fournis avec les éléments orbitaux.

Magnitudes I, J, K′

Les magnitudes I, J et K′ ont été estimées par application à la magnitude visuelle d'un indice de couleur, fonction du type de l'astéroïde. La détermination de ces indices de couleur a été faite au cours du stage de DEA de Stéphanie Ruphy (1993).

Classification des astéroïdes

Dans le visible et l'infrarouge, le facteur déterminant des propriétés spectrales est la composition des surfaces des astéroïdes, chaque composant absorbant des régions spécifiques du spectre électromagnétique ; ainsi, de nombreuses classes d'astéroïdes ont été déterminées à partir de l'examen de leur spectre. La classification la plus répandue est celle de David J. Tholen (1984) comportant 14 classes.

Ces 14 classes ont été regroupées en 3 superclasses à l'aide de données autres que spectroscopiques : radar, relatives aux météorites, ... par J. Bell (1988) qui distingue ainsi les astéroïdes primitifs, les astéroïdes ignés et les astéroïdes métamorphiques.

Données photométriques

Dans le proche infrarouge, il n'existe que peu de données sur les astéroïdes. Nous avons utilisé les données photométriques collectées lors d'un survey de 119 astéroïdes, en 52 couleurs, entre novembre 1983 et avril 1987, sur une plage de longueurs d'onde comprises entre 0.8 et 2.5 μm, communiquées par Beth Clark (Université de Hawaï). Sur les 14 classes de Tholen, seule la classe Q n'était pas représentée. Pour les 13 autres classes, un indice moyen par classe a pu être établi (table 2).

Table 2

Superclasse "Primitifs" :

Classes Tholen	D	P	C
V-I	0.75	0.65	0.65
V-J	1.60	1.40	1.25
V-K	1.95	1.75	1.60

Superclasse "Ignés" :

Classes	V	R	S	A	M	E
V-I	0.55	0.65	0.75	0.75	0.70	0.7
V-J	1.40	1.80	1.45	1.60	1.40	1.30
V-K	1.50	1.85	1.80	2.40	1.75	1.60

Superclasse "Métamorphiques" :

Classes Tholen	T	B	G	F
V-I	0.80	0.60	0.60	0.55
V-J	1.55	1.20	1.25	1.15
V-K	1.95	1.50	1.60	1.55

Indices moyennés sur les 14 classes : V-I : 0.65 V-J : 1.40 V-K : 1.75

Pour tous les astéroïdes pour lesquels les classes sont connues, on affecte alors cet indice de couleur à leur magnitude visuelle calculée. Pour les astéroïdes de la classe Q et pour tous ceux dont on ne connaît pas la classe, on prend pour chaque "couleur" un indice moyenné.

Conclusion

Ces éphémérides vont donc contribuer à l'*identification* des astéroïdes au cours du survey. Elles vont également permettre d'observer des astéroïdes déterminés. À partir des données obtenues, on pourra procéder à des *corrections* des indices de couleur, *compléter* la base de données photométriques des astéroïdes en 8 couleurs - de l'ultraviolet à l'infrarouge proche - en collaboration avec A. Barucci (observatoire de Meudon). En particulier, dès janvier 1995, nous allons réaliser des observations d'astéroïdes connus en U, B, V en utilisant la période de test pour des observations particulières.

Références

Bell, J.-F., Owensby, P.D., Hawke, R.B. : 1988, The 52-color asteroid survey : final results and interpretation. Lunar Planet. Sci. XIX, 57-58

Bulirsh, R., Stoer, J. : 1966, Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods, Num. Math. **8**, 1-13

Ruphy, S. : 1993, Détection des astéroïdes dans le cadre du programme Denis, Mémoire de DEA, Paris VI

Standish, E.M. Jr. : 1990, A&A, vol. **233**, 252

Tholen, D.J. : 1984, Ph.D dissertation, Univ. of Arizona