PRÉCISION DES SOLUTIONS POUR LA PRÉCESSION-NUTATION ET ROTATION DE LA TERRE RIGIDE

P. Bretagnon, P. Rocher, J.-L. Simon

Résumé

Les observations VLBI donnent depuis 1981 l'orientation de la Terre par rapport à un repère inertiel à la précision de 20 microsecondes de degré (μas). Les solutions de la rotation de la Terre supposée rigide servent de base aux solutions complètes qui tiennent compte des contraintes géophysiques. Les solutions actuelles pour une Terre rigide ont une précision comprise entre 500 et 1000 μas. La qualité des observations VLBI exige une amélioration considérable des théories de la rotation de la Terre. Nous avons donc entrepris de construire une solution analytique des trois angles d'Euler orientant la Terre rigide à une précision de l'ordre de la microseconde de degré. Par comparaison à une intégration numérique, nous avons établi que, pour le modèle utilisé, notre solution analytique a la précision suivante pour les trois angles d'Euler, sur l'intervalle 1900-2050 : 1,5 μas pour ψ, 0,5 μas pour ω et 1,4 μas pour φ.

1. Introduction

Depuis 1980, les solutions donnant la position de l'équateur terrestre ne peuvent plus être calculées en supposant la Terre rigide. Les expressions de la nutation recommandées par l'UAI en 1982 sont issues de la théorie de la nutation pour une Terre rigide de Kinoshita (1977) complétée à l'aide de fonctions de transfert établies par Wahr (1981), fonctions qui tiennent compte d'un modèle géophysique élaboré (incluant un manteau élastique, un noyau extérieur fluide et un noyau intérieur solide). Les modifications ainsi apportées se composent de nombreux termes dont les plus importants ont une amplitude de plusieurs dizaines de millisecondes de degré (mas).

Les observations VLBI donnant aujourd'hui une précision de l'ordre de 20 μas, il est souhaitable d'obtenir une solution pour la Terre rigide au niveau de 2 μas. Ainsi, la comparaison à l'observation mettra en évidence les insuffisances du modèle géophysique et non pas les erreurs de résolution des équations pour le cas rigide.

2. Précision des solutions actuelles

Depuis les expressions de Newcomb (1898) dont la précision était de l'ordre de $0''\!,500$ les solutions se sont considérablement améliorées. La précision des solutions pour une Terre rigide peut être estimée à $0''\!,100$ pour Woolard (1953), $0''\!,010$ pour Kinoshita (1977), $0''\!,003$ pour Kinoshita-Souchay (1990). En raison de la précision des nouvelles techniques d'observation de nombreuses études ont été effectuées récemment (Hartmann-Soffel, 1994, Williams, 1994, 1995). Souchay et Kinoshita ont repris la méthode hamiltonienne de 1990 et produit une solution (1997) dont la précision est de l'ordre de 900 μas. La solution de Roosbeek et Dehant (1997) intègre les équations d'Euler et a une précision de 700 μas. Bretagnon *et al* (1997a) ont, en intégrant également les trois angles d'Euler, construit une solution analytique dont la précision de 16 μas a été établie par comparaison à une intégration numérique sur l'intervalle 1900-2050.

Comme toutes les solutions analytiques de la précession-nutation construites depuis dix ans, notre solution utilise les théories analytiques du Bureau des longitudes pour le mouvement de la Lune (solution ELP82, Chapront-Touzé et Chapront, 1983) et pour le mouvement du Soleil et des planètes (solution VSOP87, Bretagnon et Francou, 1988). Nous avons repris (Bretagnon *et al*, 1997b) la construction de la solution analytique de la rotation de la Terre supposée rigide en effectuant les calculs à une meilleure précision et en introduisant les solutions complètes du mouvement de la Lune, du Soleil et des planètes. Sur l'intervalle 1900-2050, la différence entre la solution analytique et l'intégration numérique n'excède pas 1,5 μas.

3. Équations du mouvement

Les équations différentielles pour les trois angles d'Euler s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} + \frac{C}{A}\sin\omega_0\,\varphi_1\,\dot{\psi} &= \frac{L}{A} + F_2 + \frac{B-A}{A}\,F_1 \\ \sin\omega_0\,\ddot{\psi} - \frac{C}{A}\varphi_1\,\dot{\omega} &= \frac{M}{A} + G_2 + \frac{B-A}{A}\,G_1 \\ \ddot{\varphi} &= \frac{N}{C} + H_2 + \frac{B-A}{C}\,H_1 \end{aligned} \tag{1}$$

avec :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}\ddot{\psi}\sin 2\tilde{\varphi}\sin\omega + \dot{\psi}\dot{\varphi}\cos 2\tilde{\varphi}\sin\omega - \dot{\omega}\dot{\varphi}\sin 2\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\ddot{\omega}(1-\cos 2\tilde{\varphi}) + \frac{1}{4}\dot{\psi}^2(1+\cos 2\tilde{\varphi})\sin 2\omega \\ G_1 &= -\frac{1}{2}\ddot{\psi}(1+\cos 2\tilde{\varphi})\sin\omega + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin 2\tilde{\varphi}\sin\omega + \dot{\omega}\dot{\varphi}\cos 2\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\ddot{\omega}\sin 2\tilde{\varphi} + \frac{1}{4}\dot{\psi}^2\sin 2\tilde{\varphi}\sin 2\omega \\ H_1 &= \frac{1}{2}\dot{\omega}^2\sin 2\tilde{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\omega}\cos 2\tilde{\varphi}\sin\omega - \frac{1}{4}\dot{\psi}^2\sin 2\tilde{\varphi}(1-\cos 2\omega) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= -\frac{C}{A}\,\varphi_1\,\dot{\psi}\,(\sin\omega - \sin\omega_0) - \frac{C}{A}\,\Delta\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\,\sin\omega - \frac{1}{2}\,\frac{C-A}{A}\,\dot{\psi}^2\,\sin 2\omega \\ G_2 &= \frac{C}{A}\,\Delta\dot{\varphi}\,\dot{\omega} - \ddot{\psi}\,(\sin\omega - \sin\omega_0) - \frac{A+B-C}{A}\,\dot{\psi}\,\dot{\omega}\,\cos\omega \\ H_2 &= -\ddot{\psi}\,\cos\omega + \dot{\psi}\,\dot{\omega}\,\sin\omega \end{aligned} \tag{3}$$

Les quantités A, B et C représentent les moments principaux d'inertie. F_2, G_2, H_2 sont des quantités petites ainsi que les facteurs $\frac{B-A}{A}$ et $\frac{B-A}{C}$. La perturbation est donnée par les composantes L, M, N du couple exercé sur la Terre par la Lune, le Soleil et les planètes.

Les équations (1), (2) et (3) sont exactes et les limitations de la solution analytique en précision n'ont que 3 origines :

- la limitation du développement du potentiel terrestre dans le calcul du couple (L, M, N) ; nous avons pris en compte tous les harmoniques zonaux et tesséraux donnant une contribution supérieure à 0,01 μas ;

- la résolution des équations ; les équations n'ont pas de solution exacte ; nous avons donc procédé par itération et prolongé les calculs jusqu'à ce que deux itérations successives diffèrent de moins de 0,01 μas ;

- la précision des solutions analytiques du mouvement de la Lune, du Soleil et des planètes ; l'utilisation de la solution de la Lune tronquée à différents niveaux montre qu'elle permet de déterminer l'orientation de la Terre au niveau de la microseconde de degré. Les perturbations dues au Soleil étant plus faibles que celles dues à la Lune, l'incertitude sur l'orientation de la Terre provenant de la solution VSOP87 du Soleil peut être estimée à 0,1 microseconde de degré.

4. Précision de la solution

Compte tenu de la lourdeur des calculs nécessaires à la construction analytique des variations des 3 angles situant l'équateur par rapport à l'écliptique et l'équinoxe J2000, il est indispensable d'effectuer des comparaisons en particulier à des intégrations numériques. Pour cela, nous avons intégré numériquement, avec une méthode de Stoer et Bulirsch (1980) les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\ddot{\omega} =& \frac{L}{A} + \frac{B-A}{B}\sin\tilde{\varphi}\left(\frac{M}{A}\cos\tilde{\varphi} - \frac{L}{A}\sin\tilde{\varphi}\right) - \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\omega - \frac{C-B}{A}\dot{\psi}\sin\omega\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\omega)\\
&+ \frac{B-A}{A}\,\frac{C-A-B}{B}\,(\dot{\psi}\sin\omega\sin^2\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\omega}\sin 2\tilde{\varphi})\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\omega)\\
\sin\omega\,\ddot{\psi} =& \frac{M}{B} + \frac{B-A}{A}\sin\tilde{\varphi}\left(\frac{M}{B}\sin\tilde{\varphi} + \frac{L}{B}\cos\tilde{\varphi}\right) + \frac{C+B-A}{B}\dot{\varphi}\dot{\omega} + \frac{C-A-B}{B}\dot{\psi}\dot{\omega}\cos\omega\\
&+ \frac{B-A}{A}\,\frac{C-A-B}{B}\,(\dot{\omega}\sin^2\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\psi}\sin\omega\sin 2\tilde{\varphi})\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\omega)\\
\ddot{\varphi} =& \frac{N}{C} + H_2 + \frac{B-A}{C}H_1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Ces équations sont rigoureusement identiques aux équations (1), (2) et (3) intégrées analytiquement. Seul l'ordre des termes diffère. Nous avons pris en compte le même potentiel terrestre et les mêmes solutions du mouvement de la Lune, du Soleil et des planètes.

La différence entre la solution analytique et l'intégration numérique est donnée dans la table 1 pour les angles d'Euler ψ, ω et φ sur un intervalle de 50 jours à partir de J2000 afin de tester la précision des termes diurnes et sur 150 ans de 1900 à 2050 afin de tester la précision des termes à plus longue période, en particulier le terme de période 18,6 ans. La figure 1 illustre ces résultats sur un intervalle de temps de 150 ans.

Table 1. Différences entre la solution analytique et l'intégration numérique sur des intervalles de 50 jours et de 150 ans. L'unité est la microseconde de degré.

intervalle	ψ	ω	φ
50 jours	0,023	0,006	0,022
150 ans	1,49	0,52	1,38

Toutes les précisions dont on vient de parler concernent un intervalle de temps de 150 ans compris entre 1900 et 2050. Ces précisions ne peuvent être conservées sur 1000 ans. En effet, on trouve dans les solutions des termes de période de l'ordre de 1000 ans et plus comme par exemple la grande inégalité entre Jupiter et Saturne de période 900 ans. Notons qu'une des difficultés rencontrées dans l'intégration des équations de la rotation de la Terre provient de ce que les séries contiennent des termes de période allant de 8 heures à 900 ans et plus, soit un rapport de un à un million. De plus on est confronté à des problèmes numériques lors des comparaisons des solutions analytiques aux intégrations numériques en particulier pour l'angle φ qui varie de $230\,121,675$ radians par siècle c'est-à-dire de $4,75\times10^{16}$ microsecondes, valeur à comparer à nos résidus de 1,35 microseconde de la table 1.

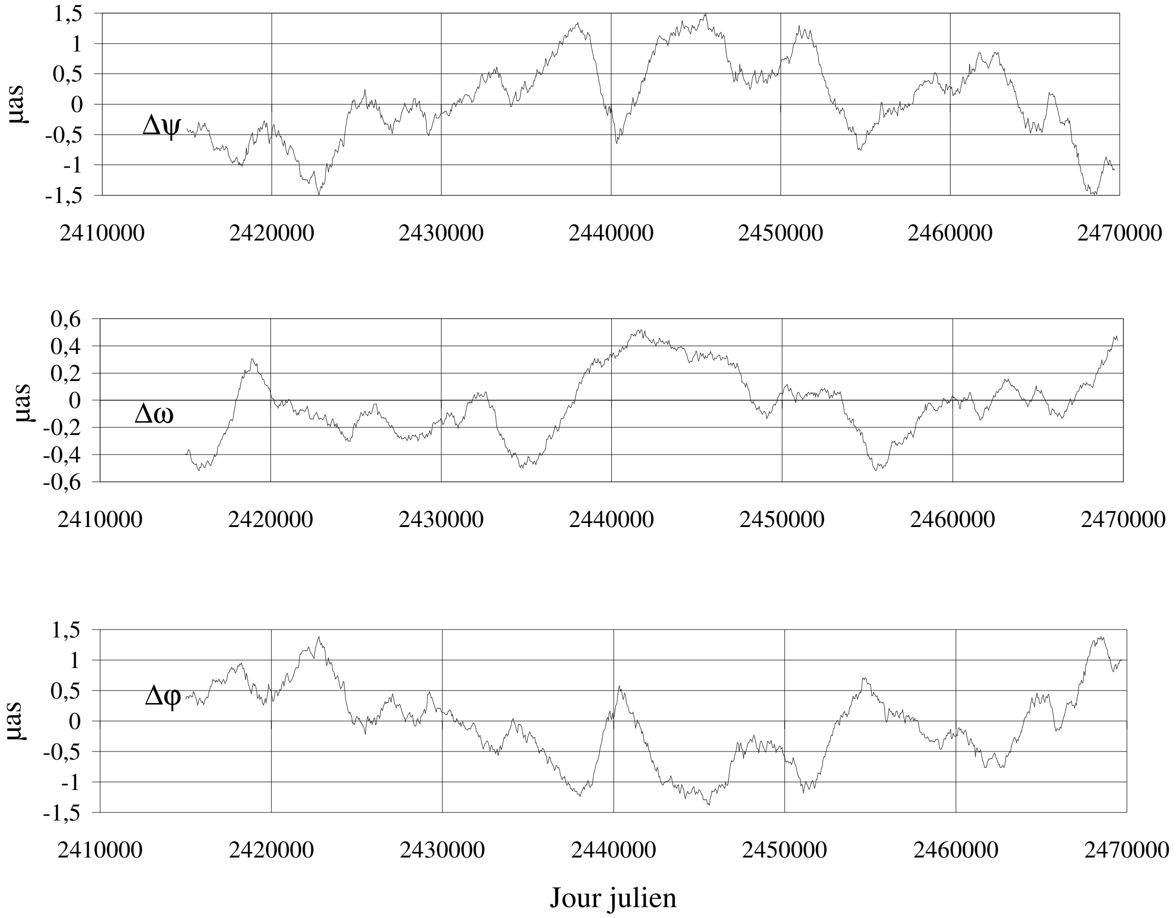

Fig. 1. Différences entre la solution analytique et l'intégration numérique sur un intervalle de temps de 150 ans (1900–2050).

5. Précision des solutions de la rotation de la Terre rigide

Les différentes solutions construites au cours de ces dernières années (Souchay-Kinoshita, Hartmann-Soffel, Williams, Roosbeek-Dehant) ont été comparées entre elles mais n'ont jamais été testées par comparaison à l'intégration numérique. Elles présentent des incertitudes de plusieurs centaines de microsecondes de degré et leur cohérence repose sur le fait qu'elles contiennent des erreurs communes comme par exemple une erreur de 250 μas sur la partie hors phase du terme de période 18,6 ans dans la précession-nutation en longitude.

Rappelons que la qualité des observations VLBI exige de construire une solution de la rotation de la Terre rigide dont la précision soit de l'ordre de la microseconde de degré, précision de notre solution donnée dans la table 1.

6. Conclusion

Les quantités de précession-nutation et rotation de la Terre rigide sont calculées à une précision de l'ordre de 1 microseconde de degré. Elles sont représentées dans le repère dynamique et dans le repère cinématique en utilisant les expressions de Brumberg *et al* (1992, 1993) et Brumberg (1996). Cette solution peut maintenant être complétée à l'aide d'une fonction de transfert (Wahr, 1981) afin de tenir compte des aspects de la géophysique interne de la Terre. Elle peut aussi être comparée à l'observation ; la différence entre la solution analytique et l'observation représente uniquement les effets de la non-rigidité de la Terre et non pas les erreurs de la solution pour une Terre rigide.

7. Bibliographie

Bretagnon, P., Francou, G., 1988, *Astron. Astrophys.*, **202**, 309.

Bretagnon, P., Rocher, P., Simon, J.L., 1997a, *Astron. Astrophys.*, **319**, 305.

Bretagnon, P., Francou, G., Rocher, P., Simon, J.L., 1997b, *Astron. Astrophys.*, en préparation.

Brumberg, V.A., Bretagnon, P., Francou, G., 1992, in : *Systèmes de références spatio-temporels*, Journées 1991, Capitaine N. ed.

Brumberg, V.A., Bretagnon, P., Francou, G., 1993, *Astron. Astrophys.*, **275**, 651.

Brumberg, V.A., 1996, IAU Colloquium 165, Poznan.

Chapront-Touzé, M., Chapront, J., 1983, *Astron. Astrophys.*, **124**, 50.

Hartmann, T., Soffel, M., 1994, *Astron. J.*, **108**, 1115.

Kinoshita, H., 1977, *Celest. Mech.*, **15**, 277.

Kinoshita, H., Souchay, J., 1990, *Celest. Mech.*, **48**, 187.

Newcomb, S., 1898, *Bulletin Astronomique*, **XV**, 241.

Roosbeek, F., Dehant, V., 1997, *Celest. Mech.*, en préparation.

Souchay, J., Kinoshita, H., 1997, *Astron. Astrophys.*, **318**, 639.

Stoer, J., Bulirsch, R., 1980, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New-York.

Wahr, J., 1981, *Geophys. J. Royal Astr. Soc.*, **64**, 705.

Williams, J. G., 1994, *Astron. J.*, **108** (2), 711.

Williams, J. G., 1995, *Astron. J.*, **110** (3), 1420.

Woolard, E.W., 1953, *Astron. J.*, **58**, 1.