ORBITES INTERMÉDIAIRES PÉRIODIQUES EN MÉCANIQUE CÉLESTE

I. Stellmacher

1. Introduction

En dehors du problème des deux corps, les mouvements des corps célestes vérifient des systèmes d'équations différentielles non intégrables. Les orbites intermédiaires, solutions particulières d'un système différentiel voisin du système décrivant le mouvement réel, sont des orbites susceptibles de représenter le mouvement avec une bonne approximation pour un intervalle de temps donné, orbite à partir de laquelle on peut construire l'orbite réelle.

– L'orbite périodique intermédiaire la plus simple est l'orbite elliptique solution du problème des deux corps : celle-ci peut être trop éloignée du mouvement réel, qui s'éloigne de cette orbite osculatrice (cas de la Lune, résonances etc ...).

– On peut dans certains cas chercher à construire une orbite mieux adaptée au mouvement observé :

1) Elle prend en compte la partie importante de la perturbation.

2) Elle est construite de façon mathématiquement rigoureuse.

3) Elle est difficile à construire, c'est certainement la raison pour laquelle il existe deux applications dans les cas les plus simples (orbites de 1ère sorte) il s'agit :

- de l'orbite de Hill pour le mouvement de la Lune,
- orbites de de Sitter pour les satellites Galiléens de Jupiter.

Nous proposons d'adapter à la mécanique céleste une méthode proposée par J. Haag (1948) permettant de représenter les différents types de solutions périodiques pouvant s'adapter aux mouvements de certains corps célestes.

2. Méthode

La méthode de synchronisation peut se résumer ainsi :

Soient deux systèmes indépendants admettant chacun des solutions périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 telles que

$$pT_1 \sim qT_2 \qquad (p, q, \in N^+).$$

Par quelle force $\overrightarrow{F}$ de couplage doit-on réunir ces deux systèmes pour que la solution du système ainsi couplé soit de période $T = pT'_1 = qT'_2$ et que le mouvement soit stable (T'_1 et T'_2 voisins de T_1 et T_2).

La solution périodique est développée asymptotiquement et à chaque ordre les conditions de périodicité déterminent les paramètres du mouvement et en particulier l'expression mathématique que peut avoir la force $\overrightarrow{F}$. Ce raisonnement peut s'étendre à un nombre fini de systèmes.

3. Synchronisation en mécanique céleste

3.1. Couplage de systèmes périodiques

On peut appliquer le schéma décrit ci-dessus à certains mouvements de mécanique céleste, par exemple :

Supposons un système de n corps de masse m_i gravitant autour d'un corps central de masse $M \gg m_i$; supposons que les périodes des mouvements observés soient sous multiples d'une même période T (cas de résonance planétaire). Ce système constitue le système couplé dont la solution est T–périodique.

$$T = k_i T'_i \qquad i = 1...n. \tag{1}$$

Les forces de couplage sont données par l'attraction mutuelle $\overrightarrow{f_{ij}}$ entre les n corps m_i. Les systèmes découplés sont constitués par le corps de masse M et le corps m_i, vers lesquels tend le système couplé lorsque $f_{ij} \to 0$.

Les périodes des mouvements découplés sont alors

$$T'_i = \frac{T_i}{1 + \varepsilon\delta_i}. \tag{2}$$

Les quantités $\varepsilon\delta_i$ sont déterminées par les conditions de périodicité.

3.2. Différents schémas possibles

a) Le système couplé est *autonome* (cas précédent).

On a $m_i \ll M$ mais tous les m_i sont du même ordre de grandeur.

Les forces f_{ij} ne dépendent que de la position des corps m_i et ne dépendent pas explicitement du temps.

b) le système couplé est *non autonome*.

L'un des corps m_i est suffisamment massif pour perturber le mouvement des autres corps m_j $(j \neq i)$ mais par contre les corps m_j ne perturbent pas le mouvement du corps de masse m_i. Dans ce cas le mouvement de m_i est elliptique et sa période T' est connue, les forces f_{ij} $(j \neq i)$ contiennent donc explicitement le temps et elles sont T'–périodiques. Si le système couplé admet une solution périodique, sa période T est telle que

$$T = q_j T'_j = pT', \quad (j \neq i), \quad (p, q_j \in N^+),$$

chaque système découplé aurait une période

$$Tj = T'_j(1 + \varepsilon\delta_j) = \frac{p}{q_j}T'(1 + \varepsilon\delta_j). \tag{3}$$

On rencontre ce type de problème dans le mouvement de la Lune perturbé par le Soleil, dans le mouvement d'Hypérion perturbé par Titan. Inversement le mouvement relatif du Soleil par rapport à la Terre n'est pas perturbé par la Lune et le mouvement de Titan n'est pas, ou très peu, perturbé par Hypérion.

3.3. Classification des orbites dans le cas autonome ou non

Nous reprendrons dans ce paragraphe la terminologie de Poincaré (1893).

a) Les orbites des systèmes découplés sont des cercles dans un même plan : orbites de première sorte. Dans ce cas les périodes T_i sont données par la formule (2) après que les conditions de périodicité aient conduit aux valeurs de $\varepsilon\delta_i$.

Les rayons des cercles sont donnés par

$$a_i^3 = \frac{kM}{4\pi^2} T_i^2. \tag{4}$$

Exemple n°1. Solutions périodiques pour les satellites galiléens de Jupiter. On construit la solution périodique pour les 3 satellites résonants à partir de la solution d'ordre zéro (ou système découplé) déterminée par (2) et (4) (voir De Sitter, 1926 ; Stellmacher, 1977).

Exemple n°2. Si n corps de masses égales m_i sont placées sur un polygone régulier de rayon R_i. Dans ce cas, tous les $\varepsilon\delta_i$ sont égaux et on montre que les rayons a_i des systèmes découplés donnés par (4) sont inférieurs à R_i. Cette solution d'équilibre relatif est instable pour $n \leq 7$. Pour $n > 7$ on peut calculer $\frac{m_i}{M}$ de façon à ce que la stabilité linéaire de système soit assurée (Stellmacher, 1979).

Exemple n°3. Cas de la Lune (cas non autonome). L'orbite de la Lune est développée à partir de la solution d'ordre zéro, solution circulaire de période

$$T_1 = \frac{p}{q} \frac{T'}{1 + \varepsilon\delta}.$$

T' est la période du mouvement du Soleil. Si l'orbite apparente du Soleil est circulaire on retrouve le cas de Hill (Stellmacher, 1976), mais l'orbite du Soleil peut être elliptique.

b) Les orbites du système découplé sont des ellipses dans un même plan : orbites de deuxième sorte.

Exemple : mouvement d'Hypérion.

c) Les orbites des systèmes découplés sont des ellipses dans des plans différents. Bien que certains mouvements observés soient proches de ce type de mouvement (Soleil-Jupiter-Pallas) par exemple, les orbites de troisième sorte n'ont pas encore reçu d'applications pratiques.

3.4. Classification selon les périodes

Dans les cas (a), (b), (c) du paragraphe 3.3, la période du mouvement observé est le plus petit commun multiple entre les périodes T_i' qui sont les périodes orbitales de chacun des corps. Ces orbites sont dites de *premier genre*.

Si la résonance fait intervenir la période des angles lents (mouvements des nœuds, ou des péricentres par exemple), la période du mouvement est aussi un multiple de celle des angles lents donc grande. Ces orbites sont dites du *second genre*.

4. Mouvement d'Hypérion

Le mouvement d'Hypérion est l'illustration presque parfaite d'une orbite de deuxième sorte et second genre.

Soient m_T, m_H et M les masses de Titan, Hypérion et Saturne. $m_T \gg m_H$ de telle sorte qu'on peut considérer le mouvement de Titan non perturbé par Hypérion ; l'orbite de Titan est alors elliptique. T_H, T', T_ω sont les périodes respectives des mouvements d'Hypérion, de Titan et du péricentre d'Hypérion. n_H, n', n_ω sont les fréquences correspondantes.

4.1. Relations entre les périodes

Les fréquences observées sont telles que

$$\dot{\psi} = 4n_H - 3n' + 3n_\omega = 0. \tag{5}$$

On peut alors considérer que chaque période est un sous-multiple d'une période unique,

$$T_H = \frac{k\bar{T}}{N_H} \quad T' = 3\frac{k\bar{T}}{N_T} \quad T_\omega = k\bar{T}$$

où N_H, N_T, $k \in N$ et $\bar{n} = \frac{2\pi}{\bar{T}}$. La relation (5) s'écrit alors

$$4N_H - N_T - 3 = 0. \tag{6}$$

Les nombres N_H, N_T, k caractérisent la résonance. Pour le cas d'Hypérion si on prend pour n' la valeur donnée par Garcia (1972)

$$n' = 22.576\,973\,85°/jour$$

$$N_T = 1325; \quad N_H = 332; \quad k = 11$$

alors

$$n_\omega = -\frac{3n'}{N_T} = -0.051\,117\,66°/\text{jour}$$
$$n_H = 3n'\frac{N_H}{N_T} = 16.971\,068\,645°/\text{jour}$$
$$\bar{n} = -kn_\omega = 0.562\,2944°/\text{jour}.$$

La relation (6) est vérifiée et les valeurs de n_H, n_ω, $\bar{n}$ ainsi calculées sont extrêmement proches de celles déterminées par différents auteurs.

Ainsi pendant le temps $T = 3k\bar{T}$, Hypérion aura effectué 996 révolutions, Titan 1325, le périastre d'Hypérion 3 et l'angle de libration ψ aura effectué 11 périodes.

4.2. Premières conditions de périodicité et détermination de la solution d'ordre zéro

Le système différentiel est écrit avec les variables de Delaunay et la fonction perturbatrice ne contient que les combinaisons des angles

$$\psi = 4l_H - 3l' + 3\theta,$$

où $\theta = \omega - \omega'$ est la différence des longitudes des péricentres d'Hypérion et de Titan.

Les premières conditions de périodicité déterminent la solution $x^{(0)}$ du système découplé (Saturne + Hypérion) vers laquelle tend le système lorsque la perturbation tend vers zéro. On obtient, si $t = 0$ correspond à une conjonction,

$$x^{(0)}\{L_0,\ G_0,\ l_H = n_H t + q\pi, \quad \omega = n_\omega t + \omega_0\}$$

Si $q = 0$ les conjonctions se font au voisinage du péricentre

Si $q = 1$ les conjonctions se font à l'apocentre, ce qui est le cas pour Hypérion.

4.3. Troisième loi de Képler

L'une des conditions de périodicité fournit la valeur de $\varepsilon\delta_H$ telle que $n_H = n_0(1 + \varepsilon\delta_H)$ où :

n_0 est le moyen mouvement képlérien correspondant au demi-grand axe a_0 (ou L_0),

a_H est le demi-grand axe d'une orbite képlérienne correspondant à n_H,

a' est le demi-grand axe de l'orbite de Titan.

On a :

$$n'^2a'^3 = n_H^2a_H^3 = n_0^2a_0^3 = \mu \qquad \rho_0 = \frac{a'}{a_0}$$

d'où

$$n_H^2a_0^3 = \mu(1 + \varepsilon\delta_H)^2 \neq \mu.$$

Ainsi le mouvement observé de Hypérion ne vérifie pas la 3ème loi de Képler.

4.4. Développement de la solution périodique

La solution périodique au 1er ordre est obtenue en posant : $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x$. $\Delta x\{\Delta L,\ \Delta G,\ \Delta l,\ \Delta\omega\}$ est solution d'un système différentiel $\psi = q\pi + \Delta\psi$.

$\Delta\psi$ est solution d'une équation différentielle du second ordre dont la solution doit être $\bar{T}$ périodique (équation de la libration).

4.5. Résultats

Afin de comparer les résultats à ceux des différents auteurs nous les donnons en termes d'éléments elliptiques : demi-grand axe, excentricité, longitude du péricentre, longitude moyenne. Les termes entre parenthèses en italique sont les valeurs extrêmes trouvées dans la littérature.

$$
\begin{aligned}
a &= a_0\,(1 - 0.00338\cos\tau) \\
e &= e_0 - 0.00395\cos\tau + \underset{(0.023\,-\,0.024)}{0.023\cos\zeta} - 0.0017\cos 2\zeta \\
\omega &= \zeta - \underset{(12^\circ.88\,-\,13^\circ.57)}{13^\circ.32\sin\zeta} + \underset{(0^\circ.93\,-\,2^\circ.16)}{1^\circ.41\sin 2\zeta} - \underset{(0^\circ.44)}{0^\circ.53\sin\tau} \\
\lambda &= 1 + \omega = \underset{(8^\circ.59\,-\,9^\circ.14)}{9^\circ.024\sin\tau} - 0^\circ.019\sin 3\tau \\
n_0 &= \frac{n_H}{1+\varepsilon\delta_H} = 16.910\,213\,97^\circ/\text{jour} \\
\rho_0 &= \frac{a'}{a_0} = 0.8247 \quad (\mathit{0.8249} : \text{Dourneau}) \\
e_0 &= 0.1041 \quad (\mathit{0.10346 - 0.1047}) \\
\tau &= \bar{n}\,(t - t_0) \\
\zeta &= n_\omega t + (\omega_0' - \omega_0)
\end{aligned}
$$

5. Conclusion

Les résultats obtenus pour l'orbite intermédiaire du mouvement d'Hypérion sont parfaitement en accord avec les résultats trouvés pour les termes critiques du mouvement réel.

Les valeurs des différentes constantes $(k,\ N_H,\ N_T)$ sont adaptées au cas d'Hypérion. On remarquera que l'orbite intermédiaire est entièrement déterminée par la connaissance des fréquences et des masses, et bien sûr, la connaissance du mouvement de Titan.

Dans la suite du travail nous envisageons d'étudier systématiquement les familles de solutions périodiques pour différentes résonances ainsi que la stabilité de ces solutions.

Références

De Sitter, W., 1926, *Ann. Sterrew. Leiden*, **12**, (3).

Garcia, A.H., 1972,*Astron. J.*, **77**, 684.

Haag, J., 1948, *Ann. Sci. de l'E.N.S.*, **65**, 299.

Poincaré, H., 1893, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, T.1, Gauthier-Villars, Paris, réédité en 1987, A. Blanchard, éd.

Stellmacher, I., 1976, *Astron. Astrophys.*, **51**, 117-126.

Stellmacher, I., 1977, *Astron. Astrophys.*, **59**, 337-347.

Stellmacher, I., 1979, *Astron. Astrophys.*, **80**, 301-307.