INTÉGRATEUR GÉODÉSIQUE

X. Moisson et S. Loyer

1. Introduction

Dans la perspective de pouvoir rendre compte des mouvements orbitaux des corps du système solaire ainsi que des satellites naturels ou artificiels autour de ces corps, on est amené à construire les équations du mouvement à partir de la théorie de la relativité générale, acceptée aujourd'hui comme théorie de la gravitation la plus ad-hoc. On obtient ainsi des modèles correctifs aux prévisions newtoniennes, à la fois pour ce qui est de la prédiction des orbites que des réductions des données collectées depuis la Terre (par exemple, correction de précession géodésique et correction de Lense - Thirring pour un satellite artificiel de la Terre).

L'idée de ce travail est de traiter le problème dans un cadre relativiste uniquement. D'après le principe des géodésiques, un corps test soumis à l'action d'un champ de gravitation extérieur suit une trajectoire géodésique dont une équation paramétrique s'écrit explicitement en fonction des dérivées partielles des coefficients de la métrique, elle-même solution des équations du champ d'Einstein pour cette distribution de matière extérieure. En d'autre termes, la connaissance de la métrique associée à la distribution d'énergie et d'impulsion du système solaire permet de connaitre les équations du mouvement d'un corps test dans ce système physique.

Ces équations du mouvement sont au nombre de quatre et rendent compte de l'évolution du quadri-vecteur d'état du corps test dans le système de coordonnées adopté[1] pour l'écriture de la solution des équations du champ. On les écrit explicitement[2] :

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{1}$$

où λ représente le paramètre du problème.

[1] On prendra ici pour système de coordonnées (x^α) pour $\alpha = 0..4$

[2] On utilise la convention de sommation d'Einstein

2. Intégration du mouvement géodésique - Méthode

Le système à intégrer est le système (??) transformé en un système d'ordre 8 en posant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u^\alpha & = & \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \\ \frac{du^\alpha}{d\lambda} & = & -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \end{array} \right. \tag{2}$$

Dans le cadre de l'approximation champs faibles et vitesses faibles, on développe la métrique $g_{\mu\nu}$ au voisinage de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (approximation PPN) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3}$$

avec

$$\eta_{00} = 1 \quad , \ \eta_{0i} = 0 \quad , \ \eta_{ij} = -\delta_{ij} \tag{4}$$

Les symboles de Christoffel apparaissant dans (2) s'expriment en fonction des dérivées partielles de la métrique[3] :

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(g_{\mu\kappa\ ,\nu} + g_{\kappa\nu\ ,\mu} - g_{\mu\nu\ ,\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(h_{\mu\kappa\ ,\nu} + h_{\kappa\nu\ ,\mu} - h_{\mu\nu\ ,\kappa} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

oú $g^{\mu\nu}$ désigne la métrique inverse relié à $g_{\mu\nu}$ par :

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu \tag{6}$$

Pour le calcul de $g^{\mu\nu}$, on utilise un développement analogue à (3) :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{7}$$

avec :

$$\eta^{00} = 1 \quad , \ \eta^{0i} = 0 \quad , \ \eta^{ij} = -\delta^{ij} \tag{8}$$

Les coefficients $h^{\mu\nu}$ s'écrivent alors au moyen des coefficients $h_{\mu\nu}$ selon :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h^{00} & = & -h_{00} + (h_{00})^2 + \ldots \\ h^{0i} & = & h_{0i} - h_{00} h_{0i} + h_{0s} h_{is} + \ldots \\ h^{ij} & = & -h_{ij} - h_{is} h_{js} + \ldots \end{array} \right. \tag{9}$$

Dans les applications que nous envisageons, la métrique $g_{\mu\nu}$ est soit la métrique barycentrique en coordonnées cartésiennes (Brumberg, 1991), soit la métrique géocentrique, soit une métrique planétocentrique quelconque.
Les symboles de Christoffel (5) sont calculés à l'aide d'une formule de dérivation numérique à l'ordre 4 :

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left(f(x-2h) + 8f(x-h) - 8f(x+h) - f(x+2h) \right) + O(h^5) \tag{10}$$

Le choix a été fait par soucis d'économie de temps de calcul de calculer toutes les dérivées partielles de la métrique au point courant ainsi que de la métrique inverse, avant d'entreprendre le calcul des seconds membres du système (2).
L'intégration est effectuée à l'aide d'un intégrateur numérique du type DOPRI8, qui est un schéma explicite de Runge-Kunta d'ordre élevé, fondée sur les formules de Prince et Dormand avec pas d'intégration variable (Hairer et al., 1987).
Cet intégrateur donne la trajectoire paramétrique d'une particule test dans la métrique choisie. Cette trajectoire est une géodésique du champ extérieur. Ainsi nous obtenons en sortie quatre fonctions discrètes du paramètre λ, $x^0(\lambda) = ct(\lambda)$ et $x^i(\lambda)$ pour $i = 1..3$.

[3] avec la notation usuelle $(\ )_{,\kappa} = \frac{\partial(\ )}{\partial x^\kappa}$

2.1. Calcul des coefficients $h_{\mu\nu}$

On constate que la donnée des coefficients $h_{\mu\nu}$ permet de calculer la métrique $g_{\mu\nu}$ à l'aide de (3), ainsi que leurs dérivées partielles en utilisant la formule (10), puis la métrique inverse d'après le formulaire (9) donc les seconds membres de (**??**) après évaluation des symboles de Christoffel (5).
On développe les coefficients $h_{\mu\nu}$ selon les puissances de $1/c$ dans un système de coordonnées $(x^0 = ct, \mathbf{r}) = (ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_{00}(t,\mathbf{r}) & = & c^{-2}h_{00}^{(2)}(t,\mathbf{r}) + c^{-4}h_{00}^{(4)}(t,\mathbf{r}) + c^{-5}h_{00}^{(5)}(t,\mathbf{r}) + \ldots \\ h_{0k}(t,\mathbf{r}) & = & c^{-3}h_{0k}^{(3)}(t,\mathbf{r}) + c^{-5}h_{0k}^{(5)}(t,\mathbf{r}) + c^{-6}h_{0k}^{(6)}(t,\mathbf{r}) + \ldots \\ h_{jk}(t,\mathbf{r}) & = & c^{-2}h_{jk}^{(2)}(t,\mathbf{r}) + c^{-4}h_{jk}^{(4)}(t,\mathbf{r}) + c^{-5}h_{00}^{(5)}(t,\mathbf{r}) + \ldots \end{array} \right. \tag{11}$$

où les $h_{\mu\nu}^{(k)}$ dépendent des potentiels et potentiels vecteurs au point $(t, \mathbf{r})$.
On aura par exemple (Brumberg, 1991) dans le cas de la métrique barycentrique en coordonnées rectangulaires associée à un système de masses ponctuelles M_i $(t = TCB)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_{00}^{(2)} & = & -2\sum_i \frac{GM_i}{r_i} \\ h_{00}^{(4)} & = & -3\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\dot{\mathbf{x}}_i^2 + 2\left(\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\right)^2 \\ & & +2\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ij}} \\ & & -\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\left(\dot{\mathbf{x}}_i^2 - \mathbf{r}_i\ddot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_i^2}\left(\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{x}}_i\right)^2\right) \\ h_{0k}^{(3)} & = & 4\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\left(\dot{x}_i^k\right) \\ h_{jk}^{(2)} & = & 2\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\eta_{jk} \end{array} \right. \tag{12}$$

où $\dot{f} = \frac{df}{dt}$, x_i représentent les coordonnées cartésiennes de la planète i à l'instant t, $\mathbf{x}_i = (x_i^1,\ x_i^2,\ x_i^3)$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $r_i = |\mathbf{r}_i|$ et $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$.
On utilise les éphémérides DE403 en substituant les valeurs numériques des coordonnées planétaires dans (12). Au voisinage d'un des corps massif, il peut être utile de remplacer l'approximation masse ponctuelle par un développement plus complet du potentiel de gravité de la forme :

$$U(r,\varphi,\theta) = \frac{GM}{r}\left[\sum_l \sum_{m=0}^{l}\left(\frac{R}{r}\right)^l \overline{P}_{lm}(\sin(\varphi)\left(\overline{C}_{lm}\cos m\theta + \overline{S}_{lm}\sin m\theta\right)\right] \tag{13}$$

3. Tests et résultats

3.1. Géodésique isotrope - le cas du photon

Les trajectoires des rayons lumineux sont des géodésiques isotropes le long desquelles on a $ds^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$. Dans ce cas, seule la trajectoire nous intéresse et le choix du paramètre λ est arbitraire. La condition $ds^2 = 0$ sert à normaliser la quadrivitesse u^μ au cours de l'intégration.
La valeur classique de la déflection des rayons lumineux rasant le Soleil prévue par la théorie pour la métrique de Schwarzschild ($\Delta\phi = 1''.75$) a été obtenue avec une excellente précision par l'intégrateur.

3.2. Les particules test

On désigne par particule test une particule dont le champ propre n'a pas d'influence sur le champ extérieur. C'est le cas des planètes dans l'approximation masse ponctuelle et a fortiori des satellites artificiels de la Terre.
La condition de constance de la quadrivitesse le long de la géodésique devient alors :

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right) \tag{14}$$

où τ le temps propre de la particule. On choisira $\lambda = \tau$ ce qui conduit à la condition de normalisation $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$.

On retrouve à l'aide de l'intégrateur la précession du périhélie planétaire dans le problème de Schwarzschild donné par :

$$\Delta\omega = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}$$

où M est la masse du corps central, a et e désignant respectivement le demi grand axe et l'excentricité de l'orbite.
Enfin, les résultats préliminaires de calculs d'orbites planétaires donnent des écarts avec la théorie DE403 de quelques microsecondes d'arc sur des intervalles de temps de quelques années c'est-à-dire en deça des amplitudes des effets relativistes.

4. Conclusion

Nous avons réalisé un logiciel d'intégration qui permet de déterminer les trajectoires des particules massives ou non (ondes électromagnétiques) fondé sur la détermination des géodésiques suivies par ces particules. L'avantage de cette méthode est de traiter directement les équations du mouvement relativiste sans recourir à des corrections post-newtoniennes. Une telle approche est applicable à la réduction des données observationnelles (observations radar, optiques, laser) ainsi qu'au calcul des trajectoires des corps massifs (astéroïdes, planètes, satellites naturels ou artificiels). Afin de compléter cet intégrateur, nous projetons d'y inclure la modélisation des changements de systèmes de référence relativiste (Brumberg et al., 1991), (Moisson, 1996), (Brumberg et al., 1993), (Fairhead et Bretagnon, 1990) ainsi que les développements des champs de gravité au voisinage des planètes (Schwintzer et al., 1997).

5. Références

Brumberg, V.-A., 1991, Essential Relativistic Celestial Mechanics, Adam Hilger.

Brumberg, V.-A., Bretagnon, P., Francou, G., 1991, Analytical algorithms of relativistic reduction of astronomical constant, Journées 1991 (ed. N. Capitaine), 141.

Brumberg, V.-A., Bretagnon, P., Francou, G., 1993, Analytical relativistic transformations between time reference systems, *Astron. Astrophys.*, **275**, 651.

Fairhead, L., Bretagnon, P., 1990, An analytical formula for the time transformation TB-TT, *Astron. Astrophys.*, **229**, 240.

Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner, G., 1987, Solving Ordinary Differential Equations I, Springer Verlag.

Moisson, X., 1996, Proceedings of the 4th von Humboldt Colloquium for Celestial Mechanics, J. Henrard, ed.

Schwintzer, P., et al., 1997, Long-wavelength global gravity field models: GRIM4-S4, GRIM4-C4, *Journal of Geodesy*, **71**.