MOYENNISATION GEVREY

D. Sauzin[1]

1. Systèmes rapidement oscillants

Nous nous intéressons aux systèmes dynamiques analytiques possédant une phase rapide. Cela signifie que parmi les variables de l'espace de phase, figure une variable angulaire φ dont le mouvement est plus rapide que celui de toutes les autres ; les autres variables $x = (x_1, \ldots, x_N)$ seront dites lentes. Un tel système s'écrit en général

$$\begin{cases} \dot{x} &= \varepsilon f(x, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi} &= \omega(x) + \varepsilon g(x, \varphi, \varepsilon) \end{cases}$$

avec un petit paramètre $\varepsilon > 0$ marquant la "lenteur" des variables x_i, et des fonctions analytiques f, g 2π-périodiques en φ, et ω vérifiant $\omega(x) > c > 0$.

Mais dans la suite, nous nous restreindrons toujours au cas plus simple d'une phase variant avec fréquence constante. On peut alors identifier φ avec le temps t et écrire le système comme une équation différentielle non autonome périodique

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t)\,. \tag{1}$$

Nous supposerons la fonction vectorielle f analytique en x ($x \in G$ ouvert de $\Re^N$) et 2π-périodique en t (mais pas nécessairement aussi régulière en t : lipschitzienne suffira).

L'objectif est de trouver de nouvelles coordonnées dans lesquelles l'équation sera plus simple parce que la dépendance en t aura été diminuée. Classiquement, la méthode de moyennisation (*cf.* Arnold et al., 1988) permet de trouver un changement de coordonnées proche de l'identité

$$x = y + \varepsilon u(\varepsilon, y, t) = y + O(\varepsilon) \tag{2}$$

(2π-périodique en t) qui conjugue notre équation (1) à une nouvelle équation

$$\dot{y} = \varepsilon(g(\varepsilon, y) + \alpha(\varepsilon, y, t)) \tag{3}$$

dans laquelle la partie oscillante pure α est d'ordre ε^m, pour $m \geq 1$ arbitraire (il suffit de prendre pour u un certain polynôme en ε, de degré d'autant plus élevé que m est grand). Et plus α est petit, plus on

[1]Travail en collaboration avec Pierre Lochak, CNRS – École Normale Supérieure

se rapproche d'un système où variables lentes et phase rapide sont découplées, beaucoup plus simple à analyser.

2. Solutions formelles

Jusqu'à quel point peut-on réduire la dépendance en temps ? Peut-on l'éliminer complètement ? Comme on l'a dit, on peut obtenir $|\alpha| = O(\varepsilon^m)$ avec m arbitrairement grand, en choisissant bien u, mais si l'on essaie de passer à la limite sur m dans l'espoir d'éliminer complètement α, on tombe en général sur des séries divergentes pour u et g. Autrement dit, l'équation

$$\partial_t u + g + \varepsilon D_y u.g = f(y + \varepsilon u, t)\,, \tag{4}$$

qui exprime le fait que l'équation initiale (1) est conjuguée à l'équation autonome

$$\dot{y} = \varepsilon g(\varepsilon, y) \tag{5}$$

par le changement de coordonnées (2), admet toujours une solution formelle

$$\tilde{u} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k u_k(y,t)\,,\ \tilde{g} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k g_k(y)\,.$$

(Pour interpréter l'équation de conjugaison (4) dans l'algèbre des séries formelles en ε à coefficients analytiques en y et périodiques en t, on utilise la série de Taylor

$$f(y+h,t) = \sum_{p\in\mathcal{N}^N} h^p f_p(y,t)\,,$$

où $h^p = h_1^{p_1} \dots h_N^{p_N}$.)

La solution formelle est même unique si l'on impose la condition supplémentaire

$$\forall k,\ u_k(y,0) = 0\,.$$

3. Propriétés Gevrey

D'un autre côté, par une méthode qui n'utilise pas ces séries formelles, Neishtadt a démontré que la partie oscillante pure de l'équation non autonome peut toujours, par un changement de variables proche de l'identité, être rendue exponentiellement petite :

Théorème 1 (Neishtadt, 1984). Si f est analytique et bornée pour x dans G', voisinage complexe de G, il existe un changement de variables de la forme (2) avec u analytique pour y dans G et des constantes $C_0, \rho_0 > 0$ tels que l'équation initiale prenne la forme (3) avec

$$|\alpha| \leq C_0\, e^{-\frac{\rho_0}{\varepsilon}}\,.$$

Le lien entre la solution formelle $(\tilde{u}, \tilde{g})$ et le résultat de Neishtadt réside dans les *propriétés Gevrey* de ces séries formelles, que l'on peut exprimer ainsi :

Théorème 2 (Sauzin, 1992). Si f est analytique pour x dans G'', voisinage complexe compact de G, il existe une constante $\rho > 0$ telle que les transformées de Borel

$$\hat{U}(\zeta,y,t) = \sum_{k\geq 0} \frac{\zeta^k}{k!} u_k(y,t)\,,\ \hat{G}(\zeta,y) = \sum_{k\geq 0} \frac{\zeta^k}{k!} g_k(y)$$

convergent pour $|\zeta[\leq \rho$.

(Remarque : si les séries formelles $\tilde{u}$ et $\tilde{g}$ étaient elles-mêmes convergentes, leurs transformées de Borel seraient entières (et de type exponentiel) par rapport à ζ ; on pourrait donc prendre ρ infini.)

L'article de Ramis et Schäfke (1996), qui reprend ce résultat et le généralise au cas d'une fréquence non constante, explique comment il permet de retrouver le théorème de Neishtadt : On applique à $\hat{U}$ et $\hat{G}$ une *transformation de Laplace incomplète* (ou *tronquée*) pour définir une solution approximative de l'équation (4). Soit en effet

$$u_\rho(\varepsilon, y, t) = \varepsilon^{-1} \int_0^\rho \hat{U}(\zeta, y, t) e^{-\zeta/\varepsilon} \, d\zeta \, ;$$

si l'on pouvait appliquer la transformation de Laplace complète (c'est-à-dire intégrer jusqu'à l'infini), on définirait une solution exacte de notre problème (grâce aux propriétés classiques des transformations de Borel et de Laplace), mais en tronquant le chemin d'intégration à l'abscisse ρ, on commet une erreur de l'ordre de grandeur de $e^{-\rho/\varepsilon}$. C'est pourquoi le changement de variable

$$x = y + \varepsilon u_\rho(\varepsilon, y, t)$$

conjugue (1) avec une équation de la forme

$$\dot{y} = \varepsilon(g_\rho(\varepsilon, y) + O(e^{-\rho/\varepsilon}))\, .$$

4. Conclusion

Ainsi donc, une étude approfondie de la transformée de Borel de la solution formelle doit permettre de préciser le résultat de Neishtadt : toute borne inférieure des rayons de convergence de $\hat{U}$ et $\hat{G}$ constitue un ρ_0 possible, et nous indique donc à quel point on peut réduire la partie oscillante pure α.

Nous travaillons actuellement à définir un domaine le plus grand possible dans lequel les transformées de Borel soient analytiques, à partir du domaine d'analyticité du flot du champ moyen $< f > (x)$: il semble en effet que ce soient les singularités de ce flot qui déterminent les singularités de $\hat{U}$ et $\hat{G}$ par rapport à ζ.

Références bibliographiques

Arnold, V. I., Kozlov, V. V., Neishtadt, A. I., 1988, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Dynamical systems III,* Springer-Verlag.

Neishtadt, A.I., 1984, Separation of Motions in Systems with Rapidly Rotating Phase, *J. Appl. Math. Mech.,* **48**, 133–139.

Ramis, J.-P., Schäfke, R., 1996, Gevrey Separation of Fast and Slow Variables, *Nonlinearity*, **9**, 353–384.

Sauzin, D., 1992, Caractère Gevrey des solutions formelles d'un problème de moyennisation, *Compt. Rend. Acad. sci.*, t. **315**, Série I, p. 991–995.