# Modèles de fluides en rotation

Audrey Trova

Journée des thèses du 5 mai 2011

sous la direction de Jeam-Marc Huré et Franck Hersant

# MODÈLES DE FLUIDES EN ROTATION

- I - Contexte & Objectif
  Propriétés des fluides
- II - Self Consistent Field Method
- III - Validation des grandeurs
  Potentiel Gravitationnel
  Enthalpie
- IV - Modèles de fluides en rotation
- V - Conclusion & Perspectives

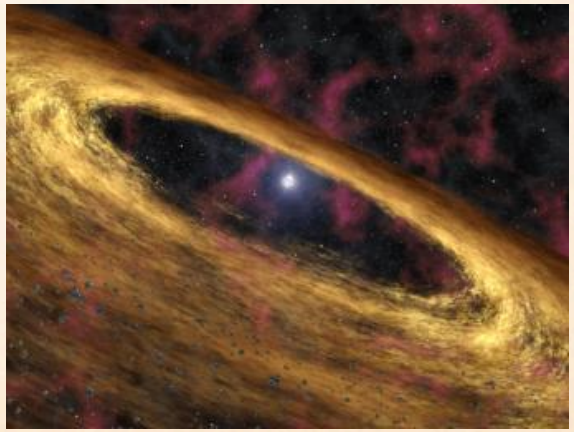
# CONTEXTE & OBJECTIFS

- Rotation : influence la forme et la structure des étoiles, des disques ou encore des planètes

Densité Pression Surface

Etoile massive en formation

Anneau débris autour d'un pulsar



# CONTEXTE & OBJECTIFS

Hachisu (1986)

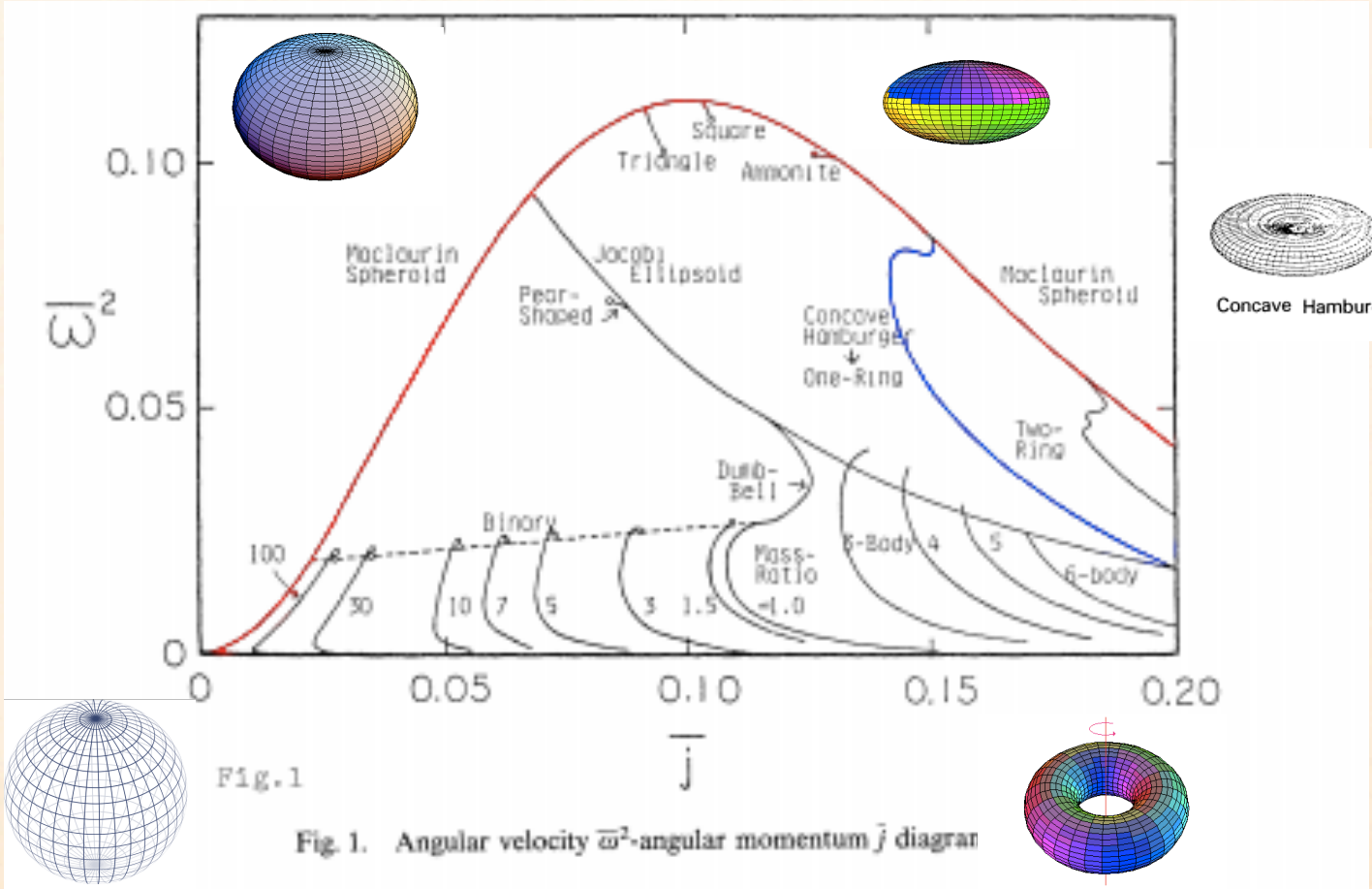
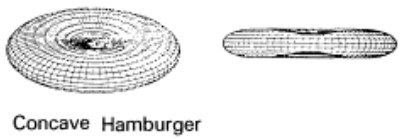



Fig. 1. Angular velocity $\overline{\omega}^2$-angular momentum $\overline{j}$ diagram



# CONTEXTE & OBJECTIFS

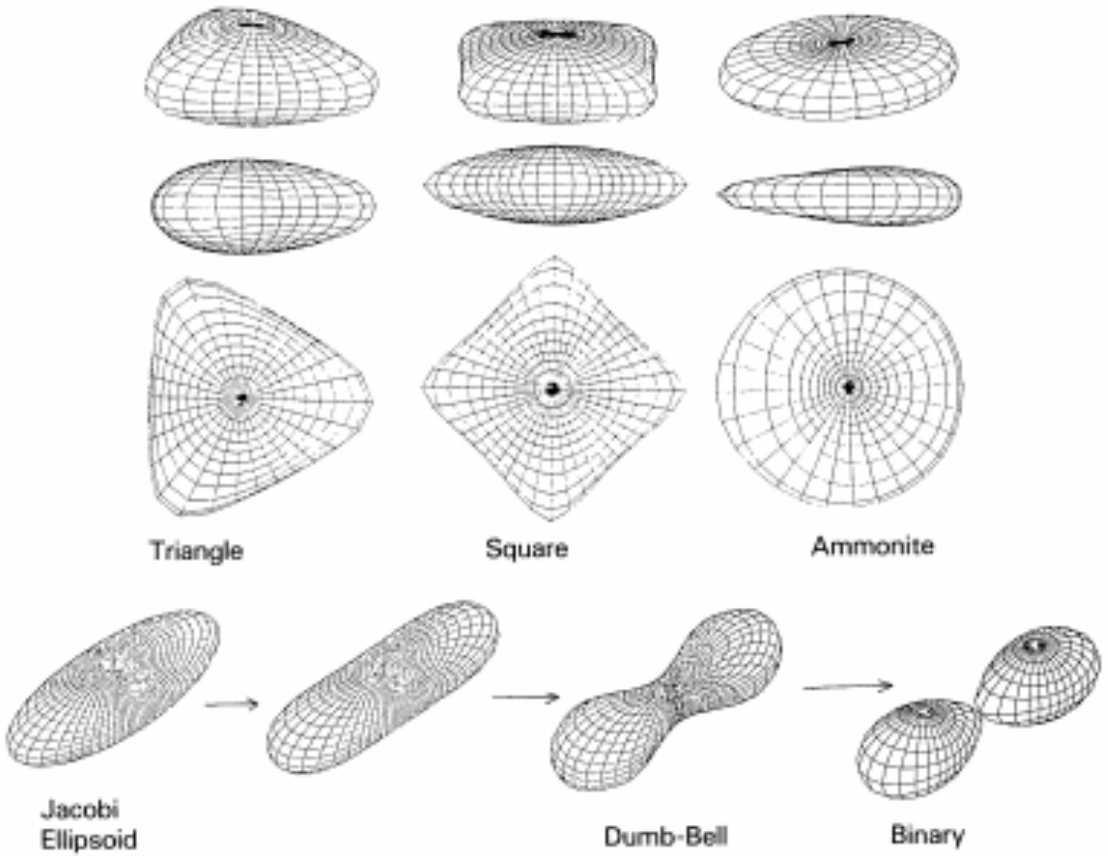



Fig. 2.

# CONTEXTE & OBJECTIFS

- Equation de Bernouilli :

$$H + \Psi + \Phi = C \quad (1)$$

Enthalpie
(force de Pression)

Potentiel gravitationnel

Potentiel centrifuge

- Propriétés des fluides :
  - axisymétrique, symétrie miroir
  - rotation: rigide $\left(\Phi = -\frac{1}{2}\Omega^2 R^2\right)$, etc...
  - autogravitant : objet soumis à sa propre gravitation
  - polytropique : $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$

- Objectif → Obtenir une structure d'équilibre d'un objet en rotation

# SELF CONSISTENT FIELD METHOD

- $\Psi(R,Z) + H(R,Z) + \Phi(R,Z) = C$ $\quad\sqrt{}$ R,Z

- Utilisation de la méthode SCF (self consistent field) : système d'itération menant à l'équilibre

  Paramètres initiaux $\left\{\rho^0(a,z); z_+^0(a)\right\}$

  Phase itérative

  $\Psi^i(R,Z)$

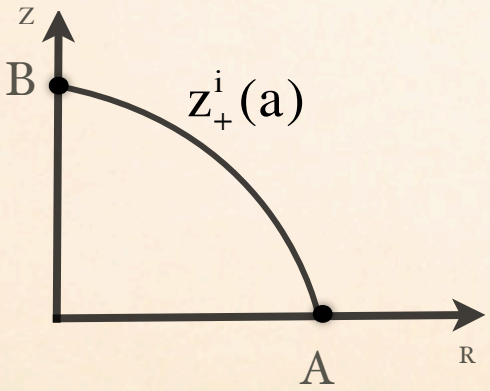
  $H^i(R,Z) \rightarrow \left(H^i\right)^n = \rho^{i+1}$

  Si $\rho^{i+1} = \rho^i$ vérifié $\longrightarrow$ fin de l'itération

  non vérifié $\longrightarrow$ $\rho^{i+1}$

  $\downarrow$

  localisation de $H^i = 0$ $\longrightarrow$ $z_+^{i+1}$



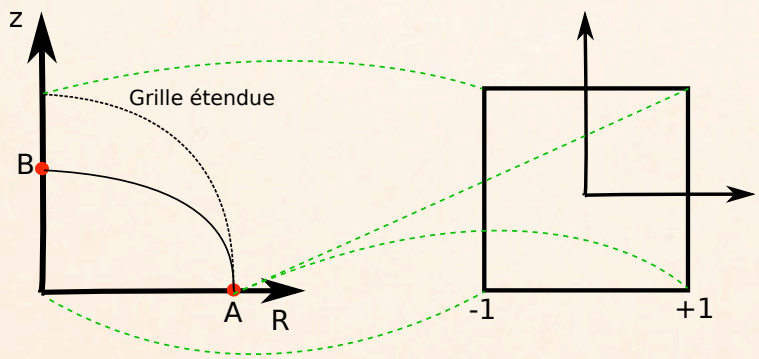
# MÉTHODES NUMÉRIQUES

- Calcul de Ψ(R,Z) par méthode de «splitting» (Huré, 2005)

$$\Psi(\vec{r}) = -\iiint_v \frac{G\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|} dv \quad (2)$$

difficulté la plus grande : divergence du noyau de Poisson.

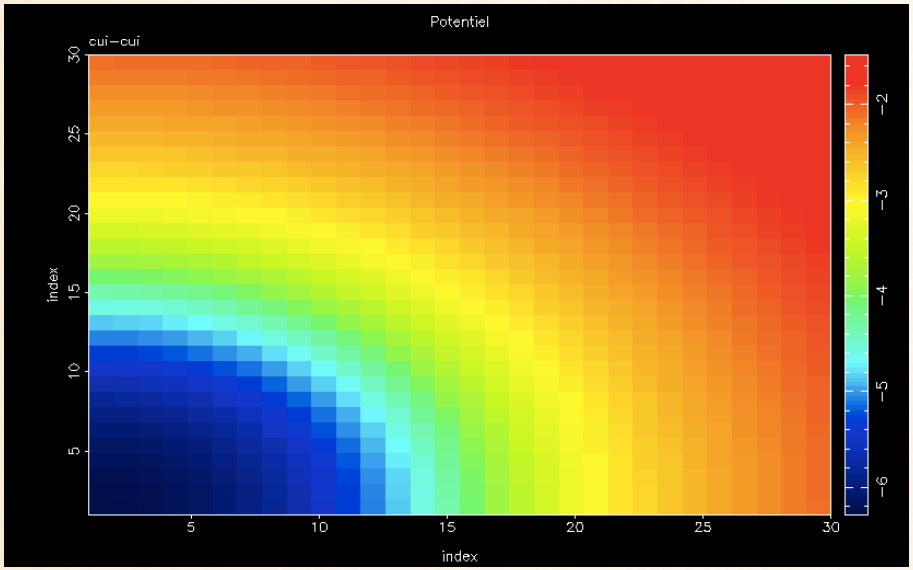
- Grille de Calcul



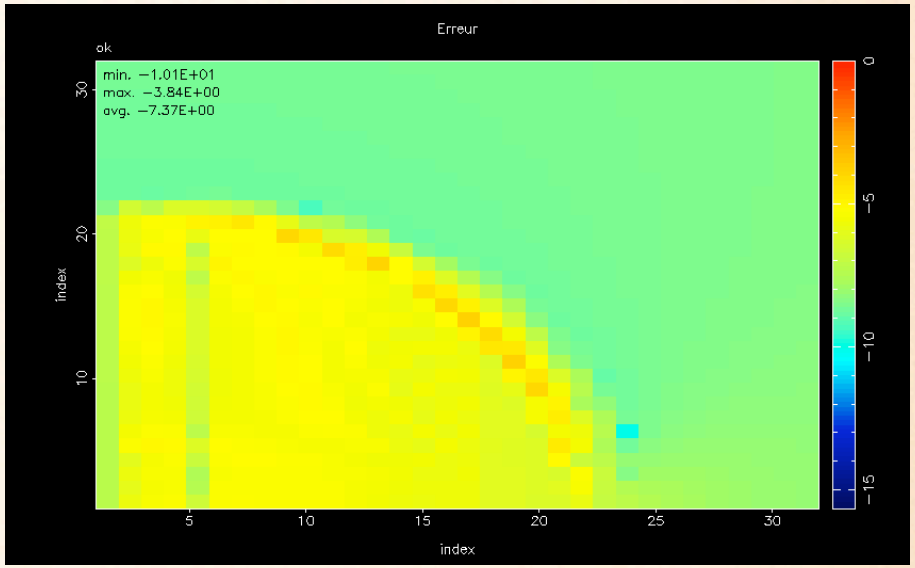

Maillage de Gauss-Lobatto-Chebyshev^2 ($N_R$,$N_Z$)

# VALIDATION DES GRANDEURS POTENTIEL GRAVITATIONNEL

- Calcul du Potentiel gravitationnel (32^2)




Potentiel d'une sphère homogène



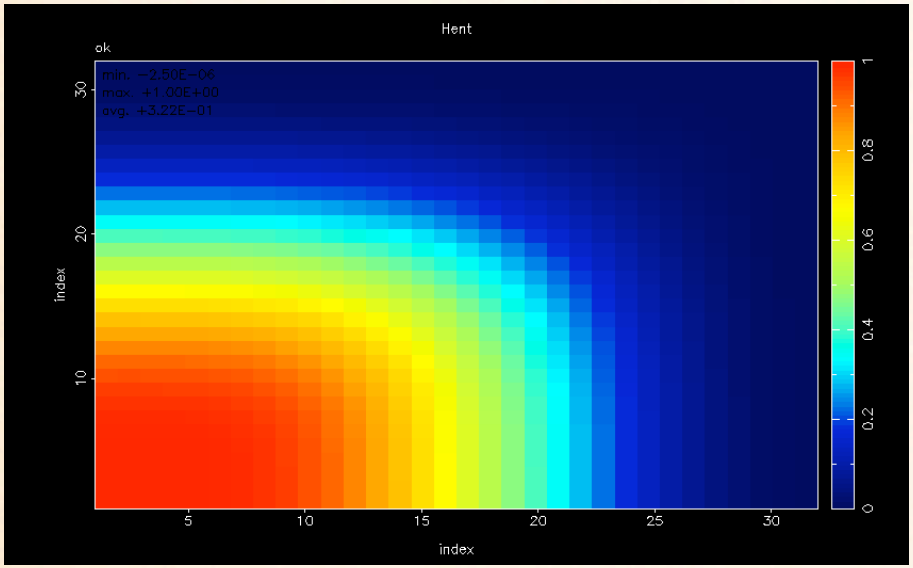

Erreur log par rapport au potentiel de la sphère

$$\Psi_{\text{ref}}^{\text{out}} = -\frac{4\pi\rho}{r} \qquad \Psi_{\text{ref}}^{\text{in}} = 2\pi\rho\left(\frac{r^2}{3} - 1\right)$$

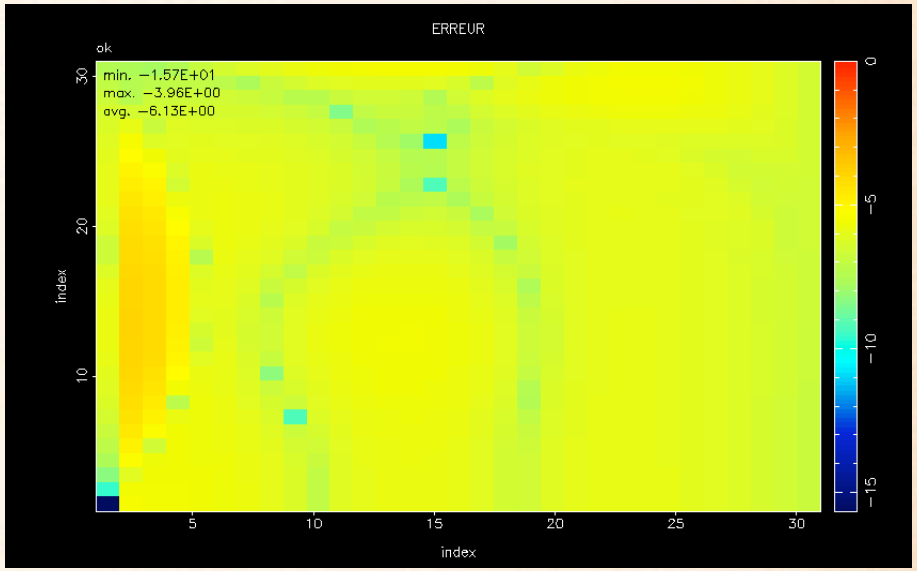
$$\varepsilon = \log_{10}\left(\text{abs}\left(\frac{\Psi_{\text{ref}} - \Psi_{\text{cal}}}{\Psi_{\text{ref}}}\right)\right)$$

# VALIDATION DES GRANDEURS
# ENTHALPIE

- Calcul de l'enthalpie H (32^2)
  Cas sans rotation et n=1 → Solution analytique connue




Enthalpie du système



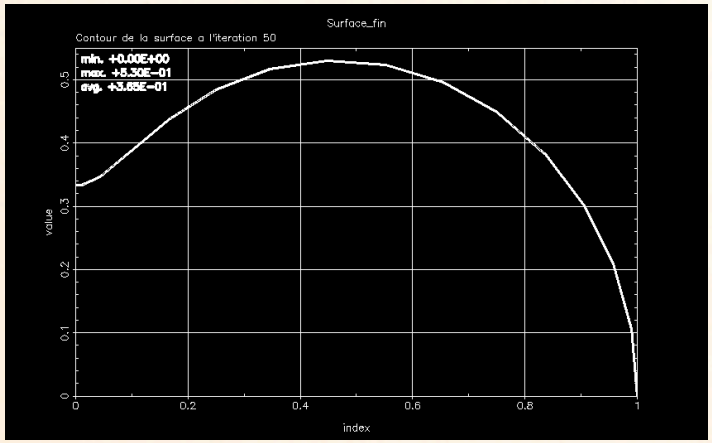

Erreur log par rapport à l'enthalpie de référence

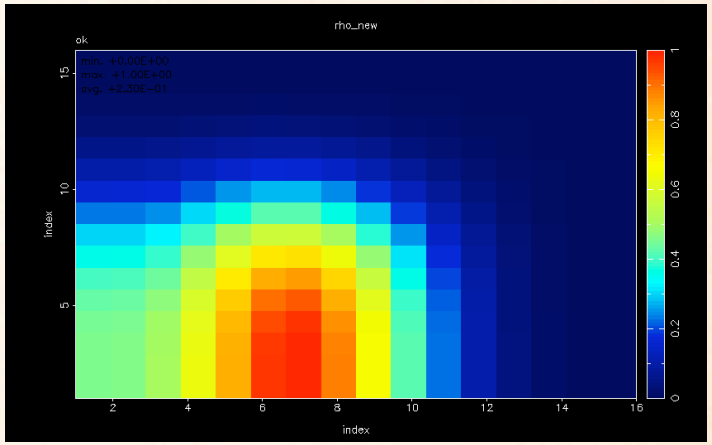
$$H_{ref} = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r}$$

$$\varepsilon = \log_{10}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{H_{ref} - H_{cal}}{H_{ref}}\right)\right)$$

# MODÈLES DE FLUIDES EN ROTATION

- Exemple : Utilisation Méthode SCF
  Paramètres initiaux : $Z_B$=0.083 ; loi de rotation v-constant



# MODÈLES DE FLUIDES EN ROTATION
# EXEMPLE EN ROTATION RIGIDE

- n=1.5 (Hachisu 1986)

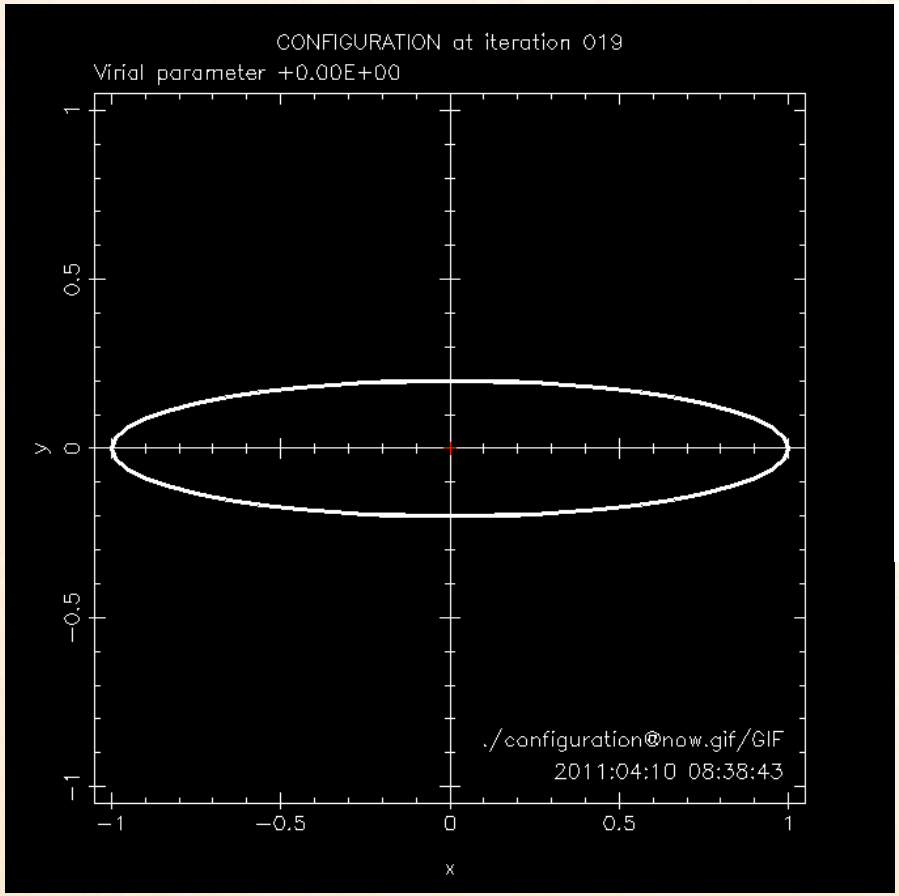
| | $Z_B$ | $\Omega$ | M | V | J | T | -W | $3\Pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hachisu (128^2) | 0.750 | 0.227 | 0.430 | 3.03 | 0.0356 | 0.00847 | 0.183 | 0.167 |
| 16^2 | 0.750 | 0.226697 | 0.430274 | 3.029293 | 0.035560 | 0.00846 | 0.1834633 | 0.1665385 |

- n=3 (Reese 2006)

| | $Z_B$ | $\Omega^*$ | $\alpha$ | $\Lambda$ | $\rho_c/\rho_{moy}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Reese (50^2) | 0.9441456 | 0.18 | 62.01827 | 52.31955 | 58.44017 |
| 16^2 | 0.9441456 | 0.1801 | 61.9187 | 52.2267 | 58.33788 |
| 32^2 | 0.9441456 | 0.180013 | 62.01091 | 52.31327 | 58.43229 |

# MODÈLES DE FLUIDES EN ROTATION

Cas Ω=constante et n=0; configurations de surface différentes ($Z_B$ différents)



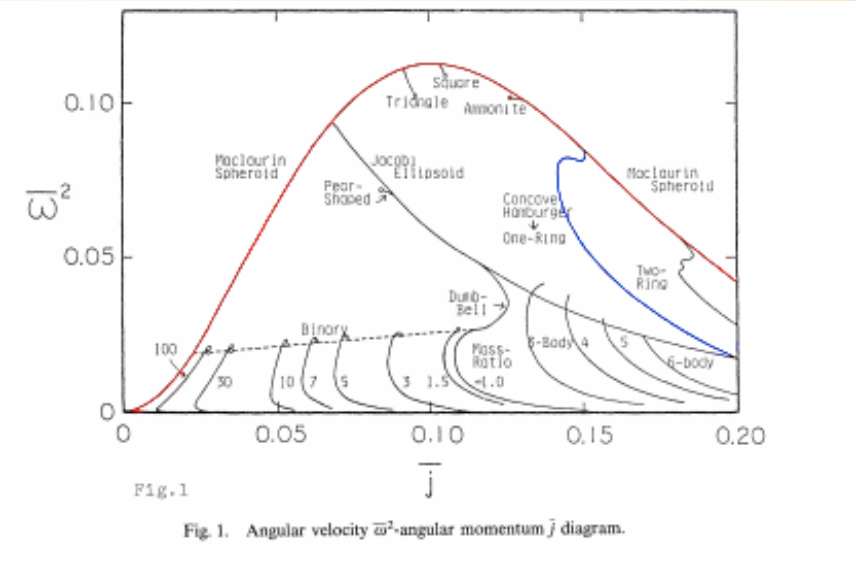




Fig. 1. Angular velocity $\bar{\omega}^2$-angular momentum $\bar{j}$ diagram.

# CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

- CONCLUSIONS

  Bon fonctionnement du code SCF :

  Grande précision à basse résolution (rapidité du temps de calcul)

  Loi de rotation quelconque

  Indice polytropique quelconque

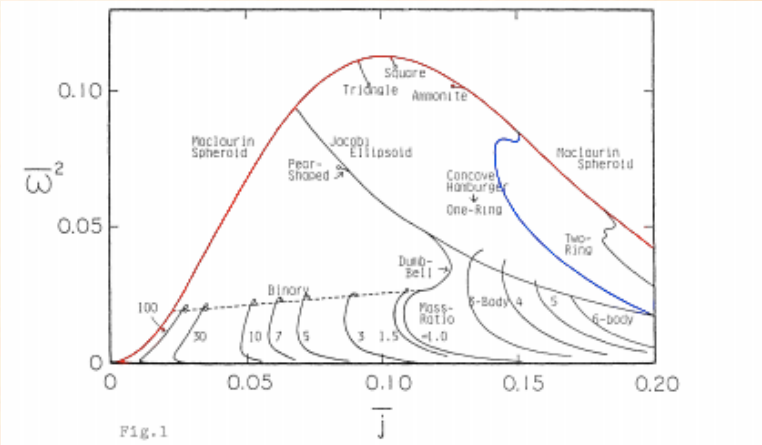



Fig. 1. Angular velocity $\overline{\omega}^2$-angular momentum $\bar{j}$ diagram.

- PERSPECTIVES

  Etude d'une loi de rotation plus réaliste

  Recherche de nouvelles solutions ?

MERCI DE VOTRE ATTENTION